はじめよう数学

上野健爾|浪川幸彦|高橋陽一郎|編集

6

ガンマ関数入門

E. Artin
E.アルティン
[著]

Ueno Kenji
上野健爾
[訳・解説]

日本評論社

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER GAMMAFUNKTION

by Emil Artin

はじめよう数学

この本を手に取られたみなさん！

この本は，同じシリーズの他の本とともに，みなさんを新しい数学の世界に御案内します．

出発地は，みなさんが大学や高等学校で学んでいる数学そのものです．いえ，ここで本を閉じてはいけません．みなさんの学んでいる数学が，いかに豊かでさまざまな数学の世界につながっているかを具体的に知っていただこうというのがこのシリーズの目的です．

旅行の準備として用意していただくものは鉛筆と紙．必ず自分で計算したり，図を書いたりして，自分の頭で考えながらお読みください．結構ハードな道もありますから，寝転がって読んでいたりすると，道に迷ってしまうかも知れませんよ．

私達がみなさんをお連れしようとしている場所は様々です．

数学は数千年以上昔，エジプト，メソポタミアで生まれ，ギリシャで一つの「学問」になりました．ピタゴラスやユークリッドの世界です．ある本はそうした数学の古い伝統がいかに現代にまで連なっているかを見せてくれるでしょう．

近代数学は，18 世紀のオイラーに端を発し，19 世紀のガウス，アーベル，リーマンなどきら星のように輝く巨人達によって花開きました．そこには数多くの美しい理論が生まれ育っています．みなさんが高等学校・大学初年時に学ぶ数学のほとんどはこの時代に由来します．ある本はみなさんの学んでいる数学が，いかに豊かで深い理論に関わっているかを教えてくれるでしょう．

では一体「現代数学」とはどんなものなのでしょう？ 20 世紀になって，前世紀からの豊かな理論は一層の発展を遂げ，以前とは大

きく異なる姿を見せるようになりました．様々の道具としての新しい概念や理論が提唱され，「抽象化」「一般化」され，それによって未解決の問題が次々に解かれていったのです．ある本はこうした数学の新たな展開について語ってくれるでしょう．

もう一つ今世紀の数学の大事なところは，数学の言葉が提唱され，数学が体系化されたことです．ヒルベルトからブルバキへの流れです．今はその言葉が普通に使われているため，かえって気がつかないのかも知れません．でもある本は「数学は一つだ」と主張して，このような言葉の大切さを思い起こさせてくれるでしょう．

また数学は物理学など他の学問と深い関わりを持っています．「自然は幾何学の言葉で書かれている」というのはガリレイの有名な言葉です．微分積分学はニュートン力学の誕生とともに確立されました．身近な様々の事柄の中に，実は深い数学が潜んでいるのです．ある本はこのような宝探しのガイドをしてくれるでしょう．

一方で数学は「あそび」です．ゲームや折り紙など，さまざまの頭の体操は数学を基にしています．それを追求していくと，その遊びの本質が実は深い理論につながっていることが分かるのです．ある本はこうして遊びながら数学を学ぶ方法を伝授してくれるでしょう．

こんなにいろいろの数学の世界がみなさんを待っています．

さあ数学を始めましょう！　みなさんはどの道を選びますか？

編集委員一同

はじめよう数学

6

ガンマ関数入門

はじめに

本書はエミール・アルティン (Emile Artin, 1898 – 1962) による “Einführung in die Theorie der Gammafunktion” (ガンマ関数入門) 1931 年，Teubner 社刊の日本語訳である．本書の著者エミール・アルティンは，アルティンの L 関数，アルティンの相互法則などに名前が冠されているように，数論を中心として重要な業績をあげた 20 世紀を代表する数学者である．アルティンは，学位論文で有限体上の代数曲線のゼータ関数を始めて定義し，リーマン予想の類似が成り立つことを予想し，その後の数論，代数幾何学の進展の大きな原動力となった．この例から分かるように，アルティンの研究は対象の本質を見出してその特質を明確にする点に特徴があり，その後の理論の進展に大きく寄与している．

また，アルティンの講義は明快で，分かりやすく本質をついたものであったと伝えられている．本書はこうしたアルティンの特色がいかんなく発揮された名著である．ガンマ関数は数学のみならず，応用でも重要な関数であるが，その取り扱いは本書が現れるまでは一定せず，理論展開に都合のよい形でガンマ関数が定義されていた．本書の出現によって，ガンマ関数の取り扱いはアルティンの流儀が主流になった．

本書は，ガンマ関数を微積分の範囲で厳密に取り扱ったものであるが，理論の単なる厳密化ではなく，その取り扱いを通してガンマ関数の特質が浮き上がってくるように記されている．初等的な議論ではあるが，微積分学の基本的な定理を駆使して，ガンマ関数の持つ性質が自然に見えるようになっている．本書を精読すれば，ガンマ関数の理論を通して，解析学の面白さを堪能するこ

とができよう.

本書は 1931 年にドイツで出版されたが, 1964 年に M. Butler による英訳 “The Gamma Function”, Holt, Rinehart and Winston が出版された. 英訳はドイツ語版の単なる翻訳ではなく, ドイツ語版では簡単に取り扱われていた第 1 章「凸関数」の部分が大幅に増補され, 他の章でもドイツ語版が修正されている個所がある. 英訳をアルティン自身も目を通していることが英訳の序文に記されているので, この日本語訳ではドイツ語と英訳とが異なる場合は原則として英訳に従うことにした. また, ドイツ語版では, 式番号は本全体の通し番号になっているが, 英訳に従って各章ごとの式番号に直した. さらに, ドイツ語版では定理, 補題などの名称が記されていない. これも英訳に従って付け加えた. それ以外はできる限りドイツ語に忠実になるようにしたが, 一部分かりやすい表現に変えたところもある.

ところで, 本書は微積分の応用として読むこともできるが, 逆に本書を学ぶことによって微積分の基本の重要性を認識することができる. 本書をていねいに読めば, 微積分の一番重要な部分の復習になる. ただ, 本書第 1 章の凸関数の議論はいささか抽象的すぎるので, 初読の際は最初の凸関数の定義の所を読んで, ただちに第 2 章から読み始めることをお勧めする. その他分 からない言葉がでてきたら, 巻末の索引をもとに該当個所をそのつど参照すれば本書を読み通すのにそれほど困難はないであろう.

本書では解析学の基本となる事実が縦横に使われているが, 他の教科書を参照しないでも理解できる程度に,「本書を読むにあたって」と題して本書に使われる解析学の基本定理に関して簡単な解説を巻末に加えた. また, 本文ではどの事実を使っているかを重複をいとわず, できる限り詳しく訳者註として記すことにした.

昨今, 実数論もエプシロン・デルタ論法もほとんどの大学で大学初年級の微積分学の講義から姿を消している. しかし, それらは決して難しいものではなく, 時間をかけてゆっくり議論を積み

重ねていけば高校生でも十分に理解できるものである．実数論やエプシロン・デルタ論法は，数やその極限をどのように捉えるかという人類の叡智の結晶でもある．数やその極限をなぜこのように捉える必要があるかは，本書を読むことによって納得されるであろう．

私が主催して行っていた「高校生のための現代数学入門講座」では 1995 年 8 月 1 日～3 日に京都大学理学部数学教室で本書の英訳 "The Gamma Function" をテキストにして夏期集中セミナーを行った．当時京都大学理学研究科大学院生の加藤文元さんと坂巻和宏さんに手伝ってもらい，"The Gamma Function" をセミナーで最後まで読むことができた．本書は高校生にとって決して簡単なテキストではないが，それにも関わらず，この集中セミナーに参加した高校生は本書の素晴らしさを堪能してくれた．そのことは，本書の「あとがきにかえて」に抜粋した参加者の感想文に端的に表れている．

集中セミナーの際，第 1 章は加藤文元氏が日本語に訳し，残りの章を講座に参加した高校生諸君が英訳からの翻訳を行った．真島秀行さんがその翻訳をていねいに見てくださり，多くの誤りを指摘し訂正してくださった．それをもとに，上野がドイツ語の原文と照らし合わせ，できる限りドイツ語の表現に近づけた．このように，本書の翻訳は多くの方々の助力によってできあがった．

本書の日本語訳ははるか以前にできており，出版することを集中セミナーに参加した当時の高校生諸君に約束していたが，出版が大幅に遅れてしまったことをお詫びしたい．

2002 年 7 月

上野　健爾

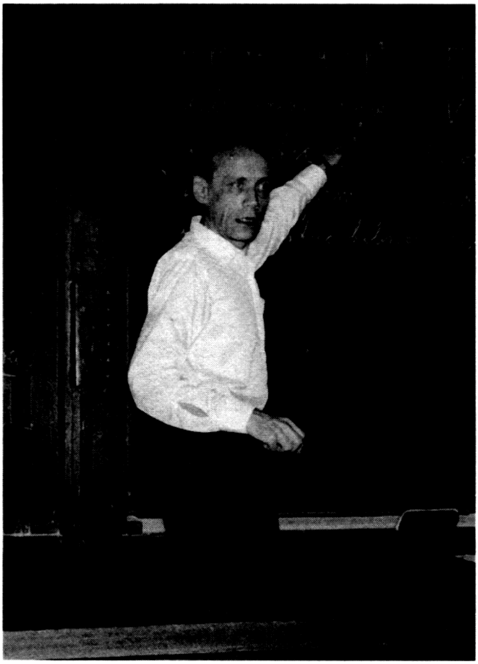
●目次

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER GAMMAFUNKTION

ガンマ関数入門

E.アルティン

上野健爾



E. アルティン

序

この小冊子では数学の教科書にしばしば見られる欠陥を補いたい．数学の多くの分野でガンマ関数は重要であるにもかかわらず，ドイツで通常使われている解析学の教科書ではガンマ関数は簡単に取り扱われ，しかも不必要に複雑な証明がつけられている．本冊子ではガンマ関数はどのような観点からも初等関数と見ることができること，またガンマ関数のすべての性質を初等的，明確かつ解析学についての数学者仲間の考え方にふさわしい証明を与えることができることを示す．

本書で必要とされる予備知識は微積分学の初歩と広義積分[1]についてである．さらにここで必要なることのいくつかは第 1 章で再度証明を与える．最後の 2 章では以上の予備知識の他にフーリエ級数[2]の理論が必要になる．しかし，そこで扱われていることはそれほど重要なことではないので読者は読み飛ばしても差し支えない．

ここで追求するガンマ関数の導入に関する基本的な考えはボーア (Bohr) とメーラップ (Mollerup) の本[3] に由来する．彼らが使った対数的に凸という基本的な考えによって理論全体を導くことができる．

ガンマ関数の理論で次の点に関しては本書では触れない．

---

[1]訳註　本書を読むにあたって「広義積分」の項を参照のこと．

[2]訳註　本書を読むにあたって「フーリエ級数」の項を参照のこと．

[3]原註　H. Bohr & J. Mollerup : Laerebog i matematisk Analyse (Kopenhagen,1922) III, 149–164. (数学解析教本第 3 巻，コペンハーゲン，1922 年)

a) 複素変数への拡張．複素関数論の講義を聴いた人は，問題にしている公式はたいていの場合は解析的に与えられているので，解析接続の原理に基づき複素数でも成り立つというだけで十分であろう．ただ，評価を含む部分は複素数の場合には取り扱いが少し変わってくる．しかしながら，こうした補足は簡単に見出すことができる．

b) ガンマ関数は代数的な微分方程式を満足しないというヘルダー (Hölder) の定理．

c) クンマー (Kummer) 級数[4] と $\log \Gamma(x)$ の積分表示[5]．

d) $\Gamma(x)$ の対数微分に関する公式の列挙．これは本書の公式 (2.10) から簡単に導くことができる．

ガンマ関数を積分を使って定義したのはガウス (Gauss) 積[6] の収束の証明をしないで済ませたかったからである．他の解析的な表示をガンマ関数の定義として採用することができる．すると，その他の解析的な表示を導くことはガンマ関数を特徴づける性質を持った関数を見出すことに帰着される．

ハンブルク　　1930 年のクリスマス

---

[4]訳註　クンマーが発見した無限級数

$$\log \Gamma(x) = \frac{1}{2}\log \pi - \frac{1}{2}\log \sin \pi x + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin 2n\pi x,$$

のこと．ここで

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}(C + \log 2\pi + \log n)$$

であり，C はオイラー定数である．(オイラー定数については第 2 章を参照のこと)

[5]訳註　$x > 0$ のとき

$$\log \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (x-1)e^{-t} \right\} \frac{dt}{t},$$

$$\log \Gamma(x) = \int_0^{\infty} (x-1)e^{-t} + \frac{(1+t)^{-x} - (1+t)^{-1}}{\log(1+t)}\, dt$$

など $\log \Gamma(x)$ を広義積分を使って表示することができる．

[6]訳註　本書第 2 章 (2.7) で与えられるガンマ関数の積表示．

第 1 章 ……………

凸関数[1]

$f(x)$ を実軸上の開区間 $a<x<b$ 上で定義された実数値関数としよう．この区間上の相異なる数の組 x_1, x_2 について，差商

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \varphi(x_2, x_1) \tag{1.1}$$

を，また相異なる数 x_1, x_2, x_3 の 3 つ組について，商

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\varphi(x_1, x_3) - \varphi(x_2, x_3)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}\end{aligned} \tag{1.2}$$

を考えよう．関数 $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ の値は x_1, x_2, x_3 の置換で不変である．

関数 $f(x)$ が (区間 (a, b) において) 凸であるとは，$\varphi(x_1, x_3)$ が，数 x_3 を我々の考えている開区間上任意に固定したときに，x_1 に関して単調増加[2]関数であるであることをいう．これは，もちろん，いずれも x_3 と異なる任意の数の組 $x_1 > x_2$ に対して不等式 $\varphi(x_1, x_3) \geq \varphi(x_2, x_3)$ が成り立つこと，言い換えれば $\Psi(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ が成り立つことを意味する．Ψ の値は x_1, x_2, x_3 の置換に関して不変であったから，$f(x)$ が凸であるというのは，不等式

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) \geq 0 \tag{1.3}$$

が，考えている区間上の相異なる数の任意の 3 つ組に対して成り立つことと

---

[1]訳註　本章は議論が抽象的で分かり難いので，初読の場合は最初の凸関数の定義の部分のみを読んで第 2 章から始め，第 2 章を読了後第 1 章を再読されることをお勧めする．

[2]訳註　ここで言う単調増加とは，等しくなる場合を含んだ意味であり，広義単調増加ということもある．

同値ということになる．

$g(x)$ を同じ区間上で定義されたもう 1 つの凸関数としよう．(1.3) と，$g(x)$ に関する同様の不等式との和をとることで，$f(x)+g(x)$ もまた凸であることが容易に示される．もっと一般的に，すべて同じ区間上で定義された凸関数の列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots$ を考えよう．さらに，その極限関数 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が存在し，この区間上のすべての x について有限の値をとると仮定しよう．すると $f(x)$ もまた凸であることが，$f_n(x)$ についての不等式 (1.3) を任意に固定した数 x_1, x_2, x_3 について考え，これを $n \to \infty$ として極限をとることによって示される．これによって，次の定理が証明される：

定理 1.1　凸関数の和は再び凸関数である．凸関数からなる収束関数列の極限は凸関数である．また，各項がすべて凸関数であるような，収束する無限級数の和は凸関数である．

定理の最後の主張は，この級数の部分和は凸であること，および，級数の和はこれら部分和の極限に他ならないことから従う．

以下，開区間 (a,b) 上の凸関数 $f(x)$ の持つ重要な性質をいくつか調べることにしよう．今，この区間上に x_0 を固定し，x_1 を $> x_0$ なる範囲で，また x_2 を $< x_0$ なる範囲で，それぞれ動かすことにしよう．このとき，

$$\varphi(x_1, x_0) \geq \varphi(x_2, x_0) \tag{1.4}$$

が成り立つ．今，x_2 を固定し x_1 を x_0 に近付けて行くと，式 (1.4) の左辺の値はつねに右辺より小さくならないように減少して行く．これにより[3]，$f(x)$ の「右」導関数，すなわち，極限

$$\lim_{\substack{x_1 > x_0 \\ x_1 \to x_0}} \varphi(x_1, x_0) = \lim_{\substack{x_1 > x_0 \\ x_1 \to x_0}} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

が存在するということが分かる．これを直観に即して記号 $f'(x_0+0)$ で書くことにする．さらに，不等式 (1.4) から

$$f'(x_0+0) \geq \varphi(x_2, x_0)$$

[3]訳註　本書を読むにあたったって「実数の性質」の定理 2 を参照のこと．

ということも分かる．同様に，x_2 を x_0 に近付けることにより,「左」導関数 $f'(x_0-0)$ もまた存在し，これらが

$$f'(x_0+0) \geq f'(x_0-0) \tag{1.5}$$

を満たすことも分かる．考えている区間上与えられた 2 数 $x_0 < x_1$ に対し，$x_0 < x_2 < x_3 < x_1$ となるように x_2, x_3 を取ると，

$$\varphi(x_2, x_0) \leq \varphi(x_3, x_0) = \varphi(x_0, x_3) \leq \varphi(x_1, x_3) = \varphi(x_3, x_1)$$

が成り立つ．ここで，x_2 を x_0 に，x_3 を x_1 に，それぞれ近付けると

$$x_0 < x_1 \quad \text{のとき} \quad f'(x_0+0) \leq f'(x_1-0) \tag{1.6}$$

を得る．

以上より，凸関数については，その片側導関数はつねに存在し，それらは (1.5) および (1.6) の不等式を満足するということが分かった．性質 (1.5) および (1.6) を，今後，片側導関数の単調増加性とよぶことにしよう．

以上の考察の逆を示すために，通常の中間値の定理を，片側導関数しか持たない関数に対しても成り立つような形に一般化する．この意味でのロル (Rolle) の定理の類似は以下で与えられる：

定理 1.2　区間 $a \leq x \leq b$ 上の連続関数 $f(x)$ が $a < x < b$ で片側導関数を持つとする．今，$f(a) = f(b)$ とする．このとき，$f'(\xi+0)$ と $f'(\xi-0)$ の片方が ≥ 0 で，もう一方が ≤ 0 であるような ξ が区間 (a, b) 内に存在する．

証明　(1)　もし $f(x)$ が考えている区間の内部に最大値をとる点 ξ があるとすると

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}$$

は，h が正のとき 0 以下であり，h が負のとき 0 以上である．極限を取ると，$f'(\xi+0) \leq 0$ および $f'(\xi-0) \geq 0$ を得る．

(2)　同様に，内部に最小値をとる点 ξ があるとすると $f'(\xi+0) \geq 0$ および $f'(\xi-0) \leq 0$ を得る．

(3)　最大値と最小値の両方をとる点が a または b とすると ($f(a) = f(b)$

と仮定したので)，$f(x)$ は定数関数でなければならないので $f'(x) = 0$ となり，ξ は内部のどこにでも取れる．以上で証明が完了した． □

平均値の定理に対応するものは，次の通り：

定理 1.3 区間 $a \leq x \leq b$ 上で定義された連続関数 $f(x)$ が，この区間の内部で片側導関数を持つとする．このとき，$(f(b) - f(b))/(b - a)$ が $f'(\xi - 0)$ と $f'(\xi + 0)$ の間にあるような，内部の点 ξ が存在する．

証明 関数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

は，連続で片側導関数

$$F'(x \pm 0) = f'(x \pm 0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を持ち，さらに $F(a) = f(a), F(b) = f(a)$ である．我々のロルの定理の拡張によれば，次のような ξ が内部に存在する：

$$f'(\xi + 0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{または} \quad f'(\xi - 0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が 0 以上で，もう一方が 0 以下である．これで，証明は完了した． □

これで，準備が整った．$f(x)$ は開区間 $a < x < b$ の上で定義された関数とする．$f(x)$ は単調増加な片側導関数を持つとする．$f(x)$ が凸であることを証明しよう．

考えている区間の中の相異なる数 x_1, x_2, x_3 を考えよう．Ψ の値は x_1, x_2, x_3 の添字の置換で変わらないから，$x_2 < x_3 < x_1$ と仮定して良い．平均値の定理によれば，$x_2 < \eta < x_3 < \xi < x_1$ で $\varphi(x_1, x_3)$ が $f'(\xi - 0)$ と $f'(\xi + 0)$ の間にあり，$\varphi(x_2, x_3)$ が $f'(\eta - 0)$ と $f'(\eta + 0)$ の間にあるような ξ と η を取ることができる．したがって (1.5) から

$$\varphi(x_1, x_3) \geq f'(\xi - 0), \quad \varphi(x_2, x_3) \leq f'(\eta + 0)$$

が分かる．式 (1.2) から，

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) \geq \frac{f'(\xi - 0) - f'(\eta + 0)}{x_1 - x_2}$$

を得る．最後に，(1.6) から

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

となり，証明できた． □

定理 1.4 $f(x)$ が凸関数であることの必要十分条件は，$f(x)$ が単調増加な片側導関数を持つこと (すなわち $f'(x_0 + 0) \leq f'(x_1 - 0)$, $x_0 < x_1$) である．

系 $f(x)$ は 2 回微分可能な関数とする．$f(x)$ が凸であることと考えている区間のすべての x について $f''(x) \geq 0$ であることは同値である．

証明 $f'(x)$ が単調増加であることは，$f''(x) \geq 0$ と同値だから． □

ここで，式 (1.2) に戻って x_1, x_2 の中点 $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ を x_3 と書くことにしよう．とりあえず，$x_2 < x_1$ と仮定する．

$$x_3 - x_2 = x_1 - x_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

である．$\Psi(x_1, x_2, x_3)$ の分子は

$$(x_1 - x_2)\left(\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) - f(x_3)\right)$$

であり，分母は正である．これより，凸関数については不等式

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) \tag{1.7}$$

を得る．これは x_1 と x_2 について対称なので，$x_1 < x_2$ でも同じように成り立つ．$x_1 = x_2$ のときは当たり前である．

関数が考えている区間の中のすべての x_1, x_2 について不等式 (1.7) を満たすとき，弱凸 (weakly convex) であるということにしよう．同じ区間で定義された 2 つの弱凸関数の和が，同じく弱凸になるのは，明らかである．また，

ある 1 つの区間で定義された弱凸関数の列の極限も弱凸であることも明らかである．

$f(x)$ は弱凸とする．不等式 (1.7) は

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)) \qquad (1.8)$$

のように一般化できる．

証明　(1)　まず最初に，(1.8) がある整数 n について成り立つとして，$2n$ のときに成立することを示す．実際，$x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ を考えている区間の中の数として，式 (1.7) の中の x_1 と x_2 をそれぞれ

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}, \quad \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}$$

で置き換えると，

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2n}}{2n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)+f\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)\right)$$

が得られる．不等式 (1.8) を，この右辺の両方の項に適用すると，

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2n}}{2n}\right) \leq \frac{1}{2n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2n}))$$

と，示したかった式を得る．

(2)　次に (1.8) が $n+1$ で成立するとして，n で成立することを示す．n 個の数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を考えると

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$$

は，同じく考えている区間の中にある．(1.8) が $n+1$ で成り立つとすれば，

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f\left(\frac{nx_{n+1}+x_{n+1}}{n+1}\right) = f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right) \\ &\leq \frac{1}{n+1}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(x_{n+1})) \end{aligned}$$

となる．$\dfrac{1}{n+1}f(x_{n+1})$ を左辺に移すと，n の場合の (1.8) が得られる．

(3)　ここで，(1) と (2) を合わせて望んでいた結果を得よう．整数 n につ

いても，(1.8) が成立しているとすると，(2) から，より小さい整数についても成立していることが分かる．

(1) から，いくらでも大きい整数についても正しい．これらから，すべての n について正しい．これで証明が完了した． □

次の定理を示そう：

定理 1.5 ある関数が凸であることと，連続かつ弱凸であることは同値である．

証明 (1) 凸関数は片側導関数を持つから，連続である．またすでに示したように，弱凸でもある．

(2) $f(x)$ は弱凸とし，考えている区間の中の数 $x_2 < x_1$ と，2 つの整数 $0 \leq p \leq n$ を考える．n 個の数のうち，p 個が値 x_1 を持ち残りの $n-p$ 個が値 x_2 を持つという状況で，(1.8) を使うと

$$f\left(\frac{p}{n}x_1 + \left(1 - \frac{p}{n}\right)x_2\right) \leq \frac{p}{n}f(x_1) + \left(1 - \frac{p}{n}\right)f(x_2) \tag{1.9}$$

を得る．ここで $f(x)$ は連続であると仮定し，t は $0 \leq t \leq 1$ を満たす任意の実数とする．t に収束する 0 と 1 の間の有理数からなる列をとる．この数列の各項は，2 つの整数 p と n をとって $\dfrac{p}{n}$ という形に書けるから，(1.9) が適用できる．$f(x)$ は連続なので極限を取ることができ，

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \tag{1.10}$$

が得られる．

考えている区間の中の互いに異なる数 (x_1, x_2, x_3) について，$\Psi(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ を示さなければならない．Ψ は対称だから，$x_2 < x_3 < x_1$ として良い．式 (1.2) の分母は正である．

$t = \dfrac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2}$ ととると，

$$0 < t < 1, \quad 1 - t = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2}$$

なので，

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \frac{(x_3 - x_2)x_1 + (x_1 - x_3)x_2}{x_1 - x_2} = x_3$$

である．したがって，式 (1.10) から

$$f(x_3) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2} f(x_2)$$

が出るので，Ψ の分子が 0 以上であることが示せた．これで証明が終った．
□

式 (1.8) で $f(x)$ を適当にとることによって，解析学で有用な数々の不等式が得られる．例えば，$x > 0$ で $f(x) = -\log x$ を考える．$f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$ だから，この関数は凸である．したがって，式 (1.8) から

$$-\log\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n)$$

が成り立つので，

$$\log\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \log \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

となり，結局，

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

が得られる．

ここで，凸性に密接に関連する重要な概念を導入しよう．ある区間で定義された正の関数 $f(x)$ が $\log f(x)$ が凸 (弱凸) であるとき，関数 $f(x)$ を対数凸 (弱対数凸) であるという．$f(x)$ が正であるという条件が必要なことは (そうでなければ，関数 $\log f(x)$ が作れないので) 明らかである．次の定理は前の結果を用いてすぐに証明できる．

定理 1.6　対数凸 (弱対数凸) 関数の積は，対数凸 (弱対数凸) である．対数凸 (弱対数凸) 関数の収束列の極限は，もしそれが正の関数ならば対数凸 (弱対数凸) である．

極限関数が正であるという条件の代わりに，列の各項の対数をとった関数

列が収束するという条件を仮定しても良い．

定理 1.7 2 回微分可能な関数を考える．不等式

$$f(x) > 0, \quad f(x)f''(x) - (f'(x))^2 \geq 0$$

が成立すれば，$f(x)$ は対数凸である．

この定理は $\log f(x)$ の 2 階導関数が

$$\frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2}$$

であることから，ただちに従う．

今までに述べられている対数凸関数の諸性質はすべて，ほぼ定義からすぐに出る結果であるが，次の注目すべき定理は，より深い結果である．

定理 1.8 同一の区間で定義された関数 $f(x)$ と $g(x)$ を考える．両方の関数が弱対数凸なら，その和 $f(x)+g(x)$ も弱対数凸である．両方の関数とも対数凸なら，$f(x)+g(x)$ も対数凸である．

証明 最初の方の主張を示せば，2 番目の主張は連続性を考慮に入れれば示される．

$f(x)$ と $g(x)$ は，どちらも正の関数である．考えている区間の中の 2 つの数 x_1, x_2 を考えると，

$$\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)^2 \leq f(x_1)f(x_2), \quad \left(g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)^2 \leq g(x_1)g(x_2)$$

が分かり，一方，示さなければならないのは，

$$\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+g(\frac{x_1+x_2}{2})\right)^2 \leq (f(x_1)+g(x_1))(f(x_2)+g(x_2))$$

である．言い換えれば，定理の証明は，正の実数 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ について $a_1c_1 - b_1^2 \geq 0$ かつ $a_2c_2 - b_2^2 \geq 0$ なら，

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2) - (b_1+b_2)^2 \geq 0$$

であることを示すことに帰着する．

2 次形式 $a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2$ を考える (ただし，$a_1 > 0$ とする)．

$$a_1(a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2) = (a_1x + b_1y)^2 + (a_1c_1 - b_1^2)y^2$$

である．$a_1c_1 - b_1^2 \geq 0$ ならば，この 2 次形式は負の値を取ることはない．一方，もし $a_1c_1 - b_1^2$ が負なら，$y = 1, x = -\dfrac{b_1}{a_1}$ で負の値 $a_1c_1 - b_1^2$ を取る．

これより，仮定している条件から

$$a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2, \quad a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2$$

の両方とも負の値を取らないから，

$$(a_1 + a_2)x^2 + 2(b_1 + b_2)xy + (c_1 + c_2)y^2$$

も負の値を取らない．結局，

$$(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) - (b_1 + b_2)^2 \geq 0$$

となり，これで証明が終った． □

等式をいじるのが好きな読者は，次の式

$$\begin{aligned} &a_1a_2((a_1 + a_2)(c_1 + c_2) - (b_1 + b_2)^2) \\ &\quad = a_2(a_1 + a_2)(a_1c_1 - b_1^2) + a_1(a_1 + a_2)(a_2c_2 - b_2^2) + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

が成り立つことを確認して，別証としても良い．

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1c_1 - b_1^2 \geq 0, \quad a_2c_2 - b_2^2 \geq 0$$

のとき，右辺は 0 以上になることが分かるので証明ができる．

今までの結果を合わせることによって，この他にも重要な結果が導かれる．2 つの変数 x, t の関数 $f(t, x)$ を考える．この関数は区間 $a \leq t \leq b$ の t とある区間上の x に対し定義された連続関数とする．さらに，t を止める毎に $f(t, x)$ は x について対数凸で，2 回微分可能とする．n は整数として，関数

$$F_n(x) = h(f(a, x) + f(a + h, x) + f(a + 2h, x)$$

$$+\cdots+f(a+(n-1)h,x))$$

をつくる (ただし，$h=\dfrac{b-a}{n}$ である)．$F_n(x)$ は，対数凸関数の和なので対数凸である．n を無限に大きくして行くと，関数 $F_n(x)$ は積分

$$\int_a^b f(t,x)dt$$

に収束するので，この積分も対数凸である．

もし，$f(t,x)$ が上の条件をある区間の内部でしか満たさないときや，考えている区間の上界が無限大のときでも，広義積分[4]

$$\int_a^b f(t,x)dt$$

が存在すれば，対数凸である．このことは広義積分が，部分区間での積分の極限であるということからすぐに分かる．対数凸な関数の極限なので，対数凸となる．

この本では，

$$\int_a^b \varphi(t)t^{x-1}dt$$

という形の積分の対数凸性しか考えない (ただし，$\varphi(t)$ は積分区間の内部で正の連続関数とする)．被積分関数の対数をとり，x について 2 回微分することによって，次の定理を得る．

定理 1.9 $\varphi(t)$ が積分区間の内部で定義された正の連続関数のとき，

$$\int_a^b \varphi(t)t^{x-1}dt$$

は，その積分が存在している (広義積分でもよい) ような区間で x について対数凸である．

次の定理は明らかである．

---

[4]訳註 本書を読むにあたって「広義積分」の項を参照のこと．

定理 1.10　ある区間で $f(x)$ が対数凸とし，実数 c は 0 でないとする．このとき，関数 $f(x+c)$ と $f(cx)$ は，各々の定義域で，どちらも対数凸である．

第 2 章……………

オイラー積分とガウスの積公式

ガンマ関数の理論は，自然数の階乗を一般の数の場合に意味のある形で一般化する問題，すなわち正整数 n に対して $n!$ を値として持ち，かつ一般の実数にその表示を拡張する問題と関係して進展した．そのような表示を求めるとよく知られた広義積分[1]

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n!$$

に至る．この表示は，左辺の整数 n を (積分が収束する限り) 任意の実数に換えることによって任意の x に対して $x!$ をこの積分の値として定義できることを示唆している．このことをまったくその通りに実行するのではなく正整数 n に対して $(n-1)!$ を値に持つ関数を導入する慣例に従おう．すなわち

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \tag{2.1}$$

を考える．この関数 $\Gamma(x)$ をガンマ関数とよぶ．まずこの積分が収束する x の値を定める必要がある．t が正のときは被積分関数は t^{x-1} より小さい．よって

$$\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt < \int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x}$$

が成り立つ．したがって $x > 0$ のとき

$$\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt$$

---

[1]訳注　本書を読むにあたって「広義積分」を参照のこと．

は $\frac{1}{x}$ で上からおさえられる．x を固定し，ε を小さくしていくと，この積分の値は単調に増大する．このことは

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt$$

が存在することを意味する[2]．

t が正のときは，e^t のべき級数展開のすべての項は正であり，すべての正整数 n に対して不等式 $e^t > \frac{t^n}{n!}$ が成り立つ．したがって $e^{-t} < \frac{n!}{t^n}$ が成り立ち，これより被積分関数に関するもう 1 つの不等式 $e^{-t}t^{x-1} < \frac{n!}{t^{n+1-x}}$ が得られる．よって，x を固定したままで整数 n を $n > x+1$ と選ぶことによって $\frac{n!}{n-x}$ を積分

$$\int_1^u e^{-t}t^{x-1}dt$$

の上界に選ぶことができる．u が増大するときこの積分の値も増大し

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{u\to\infty}\int_1^u e^{-t}t^{x-1}dt$$

が存在する．このことから，我々の定義，式 (2.1) は正の数 x に対して意味を持つことが分かる．

式 (2.1) で x を $x+1$ に換え，近似の積分を部分積分すると

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^u e^{-t}t^x dt &= [-e^{-t}t^x]_\varepsilon^u + x\int_\varepsilon^u e^{-t}t^{x-1}dt\\ &= e^{-\varepsilon}\varepsilon^x - e^{-u}u^x + x\int_\varepsilon^u e^{-t}t^{x-1}dt\end{aligned}$$

---

[2]訳註　0 に単調減少する数列 $\{\varepsilon_n\}$ に対して $a_n = \int_{\varepsilon_n}^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt$ とおくと，上の議論によって $\{a_n\}$ は単調増加数列になる．しかも $a_n < \frac{1}{x}$ であるのでこの数列は上に有界である．よって「本書を読むにあたって」「実数の性質」の定理 1 よりこの数列は収束する．この極限値が数列 $\{\varepsilon_n\}$ によらないことも簡単にいえる．

を得る．項 $e^{-u}u^x$ はやはり $\dfrac{n!}{u^{n-x}}$ より小さい．ε が 0 に近づき u が $+\infty$ に近づくと右辺の最初の 2 項は消え公式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.2}$$

を得る．この関数等式はこれからの理論の展開で基本的である．これは等式 $n! = n \cdot (n-1)!$ の非整数 n への一般化を表している．区間 $0 < x \leq 1$ でのこのガンマ関数の値が分かったと仮定しよう．式 (2.2) により区間 $1 < x \leq 2$ でのガンマ関数の値を簡単に計算することができる．すると次の長さが 1 の区間でこの関数の値が計算でき，以下これを続けていくことができる．式 (2.2) を繰り返し使うことによって，すべての正整数 n に対して

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x) \tag{2.3}$$

が成り立つことが分かる．

式 (2.1) は正の数 x に対する定義にすぎない．ここで，我々は，この定義を負の実数まで拡張したいのである．もし x が区間 $-n < x < -n+1$ にあれば，次の式によって x におけるガンマ関数の値を決めることができる．

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\Gamma(x+n) \tag{2.4}$$

x が負の整数または 0 ならば式 (2.4) の右辺は意味を持たない．そこで $\Gamma(x)$ はこのような数では定義されないものとする[3]．それ以外では $x+n$ が 0 から 1 までの間に存在するから等式 (2.4) の左辺は整合的に定義される．このように拡張された定義は明らかに整合的に構成されており等式 (2.2) はつねに成り立つ．

上の 2 つの段落によって，等式 (2.2) ではガンマ関数が特定されていないことがはっきりした．$f(x)$ が区間 $0 < x \leq 1$ 上で定義された任意の関数ならば，

$0 < x \leq 1$ に対して

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)xf(x) \tag{2.5}$$

[3]訳註　有理型関数と考えると 1 位の極を持つ．

とおき，そして $-n < x < -n+1$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} f(x+n)$$

とおく．これで $f(x)$ は 0 と負の数を除いてすべての実数において定義され，等式 $f(x+1) = xf(x)$ がつねに成り立つようにできる．ということは，確かにこれで定義はできるが (2.3) と (2.4) ではガンマ関数を特徴づけるには，まだかなり任意性がある．はじめの問題を考えれば式 (2.2) が成り立つことを要求するのはまったく自然である．これは階乗関数の基本的性質の一般化としては適当である．しかしながら，無限個のさまざまな関数が，ガンマ関数と同様にこの性質を持つことが分かる．どうすれば，他の可能性のある関数の中からガンマ関数を唯一つ決めることができるであろうか．式 (2.1) をみればすぐに次のようなことがいえる．

$$\Gamma(1) = 1$$

ゆえに

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.6}$$

さらに $\Gamma(x)$ は連続かつ微分可能である (後ほど証明される)．しかし，そうであってもなお，このような性質を持つ無限に多くの関数が存在する．

しかしながら式 (2.1) の積分には，注目すべき性質がある．それはこの関数が対数凸であるということである．これは第 1 章の積分と対数凸に関する結論によってただちに導ける．直観的には，それは $y = \log \Gamma(x)$ がたいへんなめらかであることを意味する．これは一見奇妙に見えるかもしれないが，この性質により $\Gamma(x)$ と関数等式の $f(x+1) = xf(x)$ の他のすべての解とを区別することができる．

そこで，以下のことを証明する．

定理 2.1　関数 $f(x)$ が次の 3 つの条件を満たすなら，その定義域においてガンマ関数に一致する．

(1) $f(x+1) = xf(x)$.

(2) $f(x)$ の定義域は $x > 0$ である実数をすべてを含み，それらの x について は対数凸である.

(3) $f(1) = 1$.

証明 このような性質を持つ関数 (ガンマ関数) が存在することはすでに示されている．$f(x)$ を先の 3 つの条件を満たす関数とすると，等式 (2.5) は条件 (1) によって，またすべての整数 $n > 0$ についての $f(x) = (n-1)!$ は条件 (3) より成り立つことが分かる．区間 $0 < x \leq 1$ において $f(x)$ が $\Gamma(x)$ と一致することを示せば十分である.

$f(x)$ がこのようになるのであれば，条件 (1) より定義域のどこでも $f(x)$ は $\Gamma(x)$ と一致しなければならない．x を $0 < x \leq 1$ を満たす実数とし，n を 2 以上の整数とする．不等式

$$
\begin{aligned}
\frac{\log f(-1+n) - \log f(n)}{(-1+n)-n} &\leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n)-n} \\
&\leq \frac{\log f(1+n) - \log f(n)}{(1+n)-n}
\end{aligned}
$$

はこのような特別な値に対して差商が単調増加であることを表していて，それゆえ条件 (2) よりこの不等式が正しいことが分かる．$f(n) = (n-1)!$ なので

$$
\log(n-1) \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log n
$$

あるいは

$$
\log(n-1)^x(n-1)! \leq \log f(x+n) \leq \log n^x(n-1)!
$$

が得られる．ところが対数関数は単調増加関数であるので,

$$
(n-1)^x(n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x(n-1)!
$$

が成立する．等式 (2.5) を用いて $f(x)$ 自身に関する次のような不等式を得る.

$$
\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}
$$

$$= \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{x+n}{n}.$$

この不等式がすべての $n \geq 2$ について成り立つので，左辺の n を $n+1$ と置き換えることができる．つまり

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \frac{x+n}{n}$$

簡単な計算によって次の不等式を得る．

$$f(x)\frac{n}{x+n} \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x)$$

n を無限大に近付けると，次の等式が得られる．

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

ところが $\Gamma(x)$ も先の 3 つの条件を満たす関数である．それゆえ左辺の $f(x)$ と $\Gamma(x)$ をとりかえても，いま導いた関係式はそのまま成り立つ．これによって定理は完全に証明された． □

系として公式

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{2.7}$$

を得る．実際は公式 (2.7) は区間 $0 < x \leq 1$ で証明されただけである．この等式が一般に成り立つことを示すために極限の記号下にある関数を $\Gamma_n(x)$ と記そう．等式

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x) \cdot \frac{n}{x+n+1}, \quad \Gamma_n(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x+n+1}{n}\Gamma_n(x+1)$$

は容易に示すことができる．この 2 つの式により次のことが明らかになる：n が無限大に近づくにつれ式 (2.7) の極限が x で存在すれば $x+1$ に対しても存在する．逆に，式 (2.7) が $x+1$ で成立しかつ $x \neq 0$ であれば x でも成立する．したがって極限はちょうど $\Gamma(x)$ が定義される x で存在する．式 (2.7) の極限値を $f(x)$ と記すと等式 $f(x+1) = xf(x)$ を得る．区間 $0 < x \leq 1$ で

は $f(x)$ と $\Gamma(x)$ は一致するのでその他の所でも一致しなければならない．等式 (2.7) はガウスによって導かれた[4]．この等式はガンマ関数の出発点となる定義式としてしばしば使われる．

複素関数論で重要な式 (2.7) の別の形はワイエルシュトラス (Weierstrass) によって導かれた．簡単な計算で

$$\Gamma_n(x) = e^{x(\log n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n})} \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\frac{x}{1}}}{1+\frac{x}{1}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}} \cdots \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

を得る．一方，極限

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

が存在する[5]．この極限 (値) はしばしばオイラー (Euler) の定数とよばれる．したがって

$$\Gamma(x) = e^{-Cx} \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}} = e^{-Cx} \frac{1}{x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}} \tag{2.8}$$

を得る．ここで $\prod$ は積の記号である[6]．

---

[4]訳註　実際はオイラーがすでにこの公式を発見していた．等式 (2.7) がこの章の標題のガウスの積公式である．

[5]原註　このことを証明するために

$$C_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n, \quad D_n = C_n - \frac{1}{n}$$

と置くと

$$C_{n+1} - C_n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

と

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

を得る．初等的な不等式

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

によって数列 C_n は単調減少し，D_n は単調増加することが分かる．しかも $D_n < C_n$ であり，したがって $D_1 = 0$ は C_n の下界である．すなわち，C_n はある極限 (値) に収束する．

[6]訳註　ワイエルシュトラスは

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{Cx} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} \right\}$$

さて関数 $\Gamma(x)$ は何回でも微分可能である，すなわち，$\Gamma(x)$ は任意階の導関数をもつ，ことを示そう．関数等式 (2.2) によりこのことは正の実数 x に対して示せばよい．ところで $x>0$ で $\Gamma(x)>0$ であるので $\log\Gamma(x)$ が定義できる．(2.8) より

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x) &= -Cx-\log x+\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{x}{\nu}-\log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right)\\ &= -Cx-\log x+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\nu}-\log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right)\end{aligned}\tag{2.9}$$

を得る．さて，関数 $\log\Gamma(x)$ が何回でも微分可能であることを示そう．そうすれば $\Gamma(x)=e^{\log\Gamma(x)}$ も何回でも微分可能である．式 (2.9) の級数を項別に微分することは可能であろうか．これは項別に微分して得られた新しい級数が一様収束すれば可能である[7]．もし，このことが正しければ式 (2.9) の左辺は微分可能である．式 (2.9) を微分して得られる級数は

$$-C-\frac{1}{x}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{x+\nu}\right)=-C-\frac{1}{x}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x}{\nu(x+\nu)}$$

である．x は正であるのでこの級数の一般項は $\dfrac{x}{\nu^2}$ より小さい．x を任意の区

をガンマ関数の定義として採用して理論を展開した．(2.8) をワイエルシュトラスの積公式という．

[7]訳註　区間 $[a,b]$ で定義された級数 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ を考える．もし各項を微分してできる級数 $\sum_{k=1}^{\infty} g'_k(x)$ が区間 $[a,b]$ で関数 $h(x)$ に一様収束すれば，任意の ε に対して $n\geq n_0$ であれば

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g'_k(x)-h(x)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

が成立するように n_0 を見出すことができる．もし $g_k(x)=\int_a^x g_k(t)\,dt$ がすべての k に対して成立すれば，上の不等式から

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g_k(x)-\int_a^x h(t)\,dt\right|<\varepsilon$$

を得る．これは，$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ は区間 $[a,b]$ で $g(x)=\int_a^x h(t)\,dt$ に一様収束することを意味し，かつ $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ は項別微分可能であることを意味する．今の場合 $[0,b]$, b は任意の正の数，$g_k(x)=\dfrac{x}{k}-\log\left(1+\dfrac{x}{k}\right)$ にこの議論を適用すればよい．一様収束に関しては「本書を読むにあたって」「一様収束」の項を参照のこと．

間 $0 < x \leq r$ に制限すると，一般項は $\dfrac{r}{\nu^2}$ より小さくなる．この数は x とはまったく無関係である．級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r}{\nu^2} = r\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

は収束する．したがって項別微分した級数は一様収束する．これは $\log \Gamma(x)$ が微分可能であることを意味し，問題の区間では

$$\frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+\nu}\right) \tag{2.10}$$

が成立することになる．しかし，区間は任意に選べるので式 (2.10) はすべての $x > 0$ で成立する．

再度微分したとしよう．級数

$$\frac{1}{x^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$$

を得る．$x > 0$ なので一般項は $\dfrac{1}{\nu^2}$ より小さい．この級数は明らかに正の数 x で一様収束[8]する．微分を繰り返すごとに収束性が良くなる級数を得，それらの級数は正の x で一様収束する．このことは $\log \Gamma(x)$ は何度でも微分可能であることを意味する．このようにして公式

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)}{(x+\nu)^k}, \quad k \geq 2 \tag{2.11}$$

を得る．公式 (2.11) が負の数 x で成立することを示すことは容易である．これは式 (2.2) を使って容易に示すことができる．われわれは式 (2.11) の左辺が満足する関数等式を決定したにすぎないが，右辺もこの関数等式を満たすことも示している．この両方の道筋はまったく明らかである．

$k = 2$ のときは特別に興味がある．関数

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)$$

---

[8]訳註　本書を読むにあたって「一様収束」の項を参照のこと．

はつねに正である．したがって，すべての x に対して次の不等式が成り立つ．

$$\Gamma(x)\Gamma''(x)-(\Gamma'(x))^2>0 \quad \text{または} \quad \Gamma(x)\Gamma''(x)>(\Gamma'(x))^2\geq 0$$

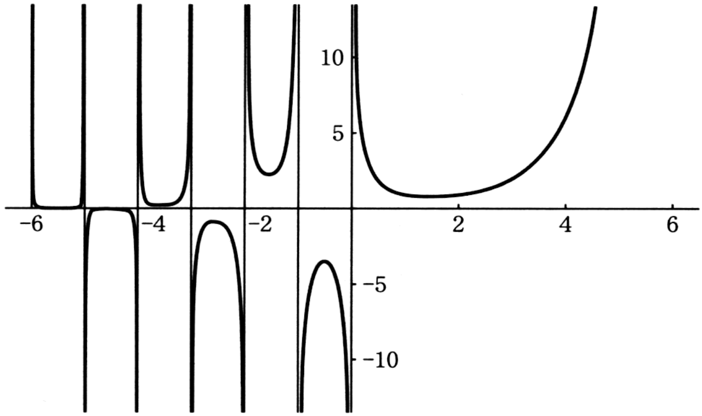
これは関数 $\Gamma(x)$ と $\Gamma''(x)$ が各 x に対して共に正であるか共に負であるかを意味する．したがって，関数 $|\Gamma(x)|$ は凸である．$\Gamma(x)$ はいつ正になりいつ負になるのであろうか．正の数 x に対しては $\Gamma(x)$ が正であることはすでに知っている．式 (2.4) より $\Gamma(x)$ は区間 $-n<x<n+1$ で符号 $(-1)^n$ を持つことが分かる．さらに，式 (2.4) より x が零に近づくか負の整数に近づくとき $\Gamma(x)$ は非常に大きな絶対値を持つことが分かる．正整数での $\Gamma(x)$ の値を知っていることから曲線 $y=\Gamma(x)$ がどのような形をしているか見当をつけることができる．(読者は実際にグラフを描いてみられと良い[9]．)

式 (2.1) の積分はオイラーによるものでオイラーの第二積分といわれる．彼はガンマ関数と関係したもう 1 つの積分を見出した．それはオイラーの第一積分とよばれる．

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{2.12}$$

今度は 2 つの変数 x と y の関数である．x と y が正のとき積分が存在するこ

[9]訳註　グラフは次のようになっている．



とを証明したい．まず，積分を 0 から $\dfrac{1}{2}$ までの積分と $\dfrac{1}{2}$ から 1 までの積分の 2 つの和に分ける．最初の積分の被積分関数はつねに $t^{x-1}(1-t)^{-1}$ より小さく，したがって $2t^{x-1}$ より小さい．二番目の積分の被積分関数はつねに $t^{-1}(1-t)^{y-1}$ より小さいので $2(1-t)^{y-1}$ より小さい．オイラーの第二積分の存在を示した論法はこれらの 2 つの積分にも適用できる．詳細は読者に任せよう．

式 (2.12) の x を $x+1$ に換え，積分を

$$B(x+1,y)=\int_0^1(1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt$$

と書くと，部分積分を行うことができ

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^{1-\eta}(1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt\\
&\quad=-\left[\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\right]_\varepsilon^{1-\eta}\\
&\qquad+\int_\varepsilon^{1-\eta}\frac{x}{x+y}(1-t)^{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}dt\\
&\quad=\frac{(1-\varepsilon)^y\varepsilon^x-\eta^y(1-\eta)^x}{x+y}+\frac{x}{x+y}\int_\varepsilon^{1-\eta}t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt
\end{aligned}$$

を得る．ε と η を 0 に近づけて次の関数等式をえる．

$$B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y)$$

さて，y を固定して式 (2.12) の積分を x の関数と考えてみよう．関数等式 (2.2) を満足する関数を得るために

$$f(x)=B(x,y)\Gamma(x+y)$$

と置こう．この関数は明らかに定理 2.1 の条件 (1) を満足する．しかも $f(x)$ は 2 つの対数的に凸な関数の積であるのでそれ自体対数的に凸である．$B(x,y)$ を x の関数と見たときの対数的凸性は積分の対数的凸性に関する定理からただちに導くことができる．これは $f(x)$ が定理 2.1 の条件 (2) も満足すること

を意味する．しかしながら，条件 (3) は満足しない．

$$B(1,y)=\int_0^1 (1-t)^{y-1}dt=\frac{1}{y}$$

が成立するので

$$f(1)=\frac{1}{y}\Gamma(1+y)=\Gamma(y)$$

が成り立つ．しかし，これは本質的な困難ではない．条件 (1), (2) を満足する任意の関数 $g(x)$ に対して条件 (3) も満足する関数をとにかく作ることができる．条件 (2) から $g(1)>0$ がでるが，これから商 $\dfrac{g(x)}{g(1)}$ を作ることができる．この関数は 3 つの条件をすべて満足するので $\Gamma(x)$ に他ならない．言い換えると

$$g(x)=g(1)\Gamma(x)$$

が成り立つ．特に，我々が考察していた場合は

$$f(x)=\Gamma(y)\Gamma(x)$$

を得る．これは式 (2.12) の積分を計算できることを意味する．

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{2.13}$$

この公式はすべての正の数 x と y に対して成立する．

式 (2.13) で $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ と置くことによって簡単に計算できる積分を得る．変数変換 $t=\sin^2\varphi$ によって

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\pi$$

を得る． 一方 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は正であるので, 次の注目すべき重要な等式を得る．

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{2.14}$$

式 (2.14) および関数方程式 (2.2) を使うことによって，整数 n に対して $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ の値を簡単に計算することができる．

第 3 章……………

x の大きな値での挙動と乗法公式

x が大きな値のとき $\Gamma(x)$ を精密に近似する初等関数は存在するであろうか．$n!$ の増大度を評価すると，それは n が増加するにつれて $n^n e^{-n}$ より速く増大するが，$n^{n+1}e^{-n}$ 程速くは増大しないことが分かる[1].

言い換えると $\Gamma(x)$ の増大度は $n^{n-1}e^{-n}$ と $n^n e^{-n}$ の間にある．このことは大きな x での $\Gamma(x)$ の挙動を調べるためには

$$f(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)} \tag{3.1}$$

の形の関数を考えればよいことを示唆する．我々の目標は，$\mu(x)$ をうまく選んで近似的にガンマ関数の基本的条件を満たす f を作ることである．式 (3.1) で x を $x+1$ で置き換え得られた表示式を式 (3.1) で割ると

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} x \cdot e^{-1} \cdot e^{\mu(x+1)-\mu(x)}$$

を得る．これは定理 2.1 の条件 (1) を $f(x)$ が満足するための必要十分条件は $\mu(x)$ が

---

[1]原註　$k = 1, 2, \cdots, (n-1)$ で成り立つ初等的な不等式

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

を掛け合わせると

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}$$

を得る．これから近似

$$en^n e^{-n} < n! < en^{n+1} e^{-n}$$

が出る．

$$\mu(x) - \mu(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \tag{3.2}$$

を満足することであることを意味する．

式 (3.2) の右辺を $g(x)$ と記そう．この性質を持つ関数 $\mu(x)$ は容易に見出すことができる．

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) \tag{3.3}$$

とおくと，無限級数 (3.3) が収束する限り式 (3.2) を満足する．収束の証明はしばらくおいて定理 2.1 の条件 (2) を考えよう．

式 (3.1) の因子 $x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$ はその対数をとった 2 階導関数 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x^2$ が x が正である限り正であるので対数的に凸である．$e^{\mu(x)}$ が対数的に凸であること，言い換えれば $\mu(x)$ が凸であることを示すことができれば $f(x)$ は条件 (2) も満足することが分かる．それは，式 (3.3) で定義した特別な関数 $\mu(x)$ から定まる関数 $f(x)$ が定数因子を度外視すれば $\Gamma(x)$ と一致することを意味する．

級数の一般項 $g(x+n)$ が凸であれば我々の $\mu(x)$ も凸である．$g(x+n)$ が凸であることを示すためには，$g(x)$ そのものの凸性を示せば十分である．しかし，

$$g''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$$

が成り立つのでこのことは明らかである．

式 (3.3) の級数が収束することを示す必要がまだ残っている．このことを関数 $\mu(x)$ の近似と結びつけて考える．$|y| < 1$ で成り立つ展開

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots$$

をまず考えよう．さて y を $\dfrac{1}{2x+1}$ で置き換えよう．$x > 0$ である限り $\dfrac{1}{2x+1} < 1$ であるので得られた展開は正の x で成り立つ．この式に $2x+1$ を掛け右辺の第一項を左辺に移項すると

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1=g(x)$$
$$=\frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{5(2x+1)^4}+\frac{1}{7(2x+1)^6}+\cdots$$

を得る．この右辺の各項は凸であるので，$g(x)$ が凸であることがこの表示から再び示される．さて $g(x)$ を近似することができる．整数 5, 7, 9, $\cdots$ をすべて 3 で置き換えると右辺の値は増加する．その結果は $\dfrac{1}{3(2x+1)^2}$ を初項とし $\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ を公比とする無限等比級数である．その和は

$$\frac{1}{3(2x+1)^2}\cdot\frac{1}{1-(1/(2x+1)^2)}=\frac{1}{12x(x+1)}=\frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}$$

である．一方 $g(x)$ は正であるので

$$0<g(x)<\frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}$$

を得る．式 (3.3) の級数の各項は正であるので

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12(x+n)}-\frac{1}{12(x+n+1)}\right)$$

の収束を示せば十分であるが，この級数が収束しその値が $\dfrac{1}{12x}$ であることは自明である[2]．このことは (3.3) の右辺の級数の収束を示すのみならず，評価式

$$0<\mu(x)<\frac{1}{12x}$$

をも与える．言い換えると

$$\mu(x)=\frac{\theta}{12x}$$

と書ける．ここで θ は x に関係する 0 と 1 の間の数である．

定数 a を適当にとると

[2]訳註　N 項までの和は $\dfrac{1}{12x}-\dfrac{1}{12(x+N+1)}$ である．

$$\Gamma(x) = ax^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)} = ax^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}} \tag{3.4}$$

が成り立つ．x を整数 n に取り上の式の両辺に n を掛けると近似式

$$n! = an^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta}{12n}} \tag{3.5}$$

を得る．

そこでこの定数 a の正確な値と，それと同時に他の重要な定数を決めよう．p を正の整数とし，$x > 0$ に関し次の関数

$$f(x) = p^x \Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)$$

を考える．$\log p^x$ の 2 階導関数は 0 で，$\Gamma\left(\dfrac{x+\nu}{p}\right)$ はそれぞれ明らかに対数凸であるので，$f(x)$ も対数凸である．

ここで x を $x+1$ に代えると，p^x には p がかかり $\Gamma\left(\dfrac{x+\nu}{p}\right)$ は次の因数に移り最後の $\Gamma\left(\dfrac{x+p-1}{p}\right)$ は

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+1\right) = \frac{x}{p}\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)$$

に移る．つまり $f(x)$ は x が掛けられるだけである．この関数 $f(x)$ もまた定理 2.1 の条件 (1), (2) を満たす．すなわち

$$p^x\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = a_p\Gamma(x) \tag{3.6}$$

ここで a_p は p によって決まる定数である．(3.6) で $x=1$ とすれば

$$a_p = p\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p}{p}\right) \tag{3.7}$$

式 (2.7) で $x = \dfrac{k}{p}$ として，分母，分子に p^{n+1} を掛けると，

$$\Gamma\left(\frac{k}{p}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{k}{p}}n!p^{n+1}}{k(k+p)(k+2p)\cdots(k+np)}$$

今 a_p を求めるために k に次々に $1, 2, \cdots, p$ を代入して，それらの式をすべて掛ける．分母には $(k+hp)$ という型の因数が現れる．ただし，k は 1 から p まで, h は 0 から n までを動く．$h=0$ とすると，1 から p が現れ，$h=1$ とすれば $p+1$ から $2p$ が現れる．このように考えると，明らかに分母は $(np+p)!$ である．結局

$$a_p = p \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{p+1}{2}}(n!)^p p^{p(n+1)}}{(np+p)!}$$

となる．よく知られた無限積

$$1 = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{np}\right)\left(1+\frac{2}{np}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{np}\right)$$

は

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{(np+p)!}{(np)!(np)^p}$$

と書き直され，これを使うことができる．この式を上の a_p を表す式に掛けてやると

$$a_p = p \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^p p^{np}}{(np)! n^{\frac{p-1}{2}}}$$

しかし式 (3.5) から得られる

$$(n!)^p = a^p n^{np+\frac{p}{2}} e^{-np} e^{\frac{\theta_1 p}{12n}} \quad \left(\mu(n) = \frac{\theta_1}{12n}\right),$$
$$(np)! = a(np)^{np+\frac{1}{2}} e^{-np} e^{\frac{\theta_2}{12np}} \quad \left(\mu(np) = \frac{\theta_2}{12np}\right)$$

を a_p の表示に代入して整理すると

$$a_p = \sqrt{p} a^{p-1} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\theta_1 p}{12n} - \frac{\theta_2}{12np}},$$

を得，結局

$$a_p = \sqrt{p} a^{p-1} \tag{3.8}$$

を得る．式 (3.7) と (3.8) を使って a_2 の値を求めると

$$a_2 = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi} = \sqrt{2}a$$

これによって定数の値が定まる．

$$a = \sqrt{2\pi}, \quad a_p = p^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}$$

この章での重要な式をすべて集めると

$$\begin{aligned}
&\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)},\\
&\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(x+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\right\} = \frac{\theta}{12x}, \quad 0<\theta<1,\\
&n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta}{12n}}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}}\Gamma(x). \qquad (3.10)$$

特に $p=2$ のとき

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x). \qquad (3.11)$$

公式 (3.9) は x が大きいときの $\Gamma(x)$ のふるまいを記述するもので，スターリング (Stirling) の公式という．$\mu(x)$ の近似が使われたとすると，$\Gamma(x)$ に対する公式の正確さは x の増加にともなって高くなる．このことは $n!$ についても正しく，$n \geq 10$ で相対的な正確さはすでにかなり高い．

関数等式 (3.10) はガウスに発見されたもので，ガウスの乗法公式とよばれる．式 (3.10) で x を px に置き換えると $\Gamma(px)$ の $\Gamma\left(x+\dfrac{k}{p}\right)$ という形の因数による積の表示を得る．このことから「乗法公式」の名がついた．もっとも重要な特殊な場合は $p=2$ のときである．ルジャンドル (Legendre) に発見されたもので，しばしばルジャンドルの関係式として引用される．

第 4 章・・・・・・・・・・・・・・・

$\sin x$ との関係

ガンマ関数はもう 1 つのとても重要な関数等式を満たす．それを導くために

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x \tag{4.1}$$

とおく．この関数は非整数に対してのみ定義されている．x を $x+1$ に置き換えると $\Gamma(x)$ は $x\Gamma(x)$ になる．$\Gamma(1-x)$ は

$$\Gamma(-x) = \frac{\Gamma(1-x)}{-x}$$

となり $\sin\pi x$ は符号を変える．これは $\varphi(x)$ がこの置き換えで不変であることを意味し，よって周期 1 を持つ周期関数であることを意味する．

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) \tag{4.2}$$

ルジャンドルの関係は

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = b2^{-x}\Gamma(x)$$

と書ける．ここで b は定数である．実際, b の正確な値は第 3 章で決定されているがここでは必要ない．ここでは，b は単にある特殊な定数としておく．

上の式で x を $1-x$ に置き換えると

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right) = b2^{x-1}\Gamma(1-x).$$

ここで

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\cos\frac{\pi x}{2}$$
$$= \frac{b^2}{4}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x$$

を考えると

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = d\varphi(x) \tag{4.3}$$

という関係式が得られる．ここに d は b によって決まる定数であるが，その正確な値はここでは重要ではない．

$\Gamma(x)$ と $\sin x$ は共に何回でも微分できるので，$\varphi(x)$ もこの性質を持っている．関数等式 (2.2) より

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{x}\Gamma(1-x)\sin\pi x$$
$$= \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\left(\pi - \frac{\pi^3x^2}{3!} + \frac{\pi^5x^4}{5!} - \cdots\right)$$

と書け，べき級数は任意の x で収束する．しかも，この等式の右辺は $x=0$ でも定義されており，このことは関数がこの点で任意の階数の微分係数を持つことを示している．これより $\varphi(x)$ は $x=0$ で π になるとして，式 (4.1) の定義域を広げることを考える．$\varphi(x)$ は周期関数なので，すべての整数 m に対して $\varphi(m)$ の値を π と定義する．すると $\varphi(x)$ はいたるところで連続で，何回でも微分可能な関数となる．関係式 (4.3) は非整数 x に対してのみ証明されていたが，x を任意の整数に近づけてやると，連続性よりすべての x に対して等式 (4.3) が成立することが示される．$\varphi(x)$ の符号を考えると等式 (4.1) より区間 $0 < x < 1$ で $\varphi(x)$ は正となる．等式 (4.2) より，このことはすべての x に対して成り立つ．

我々の目標は，$\varphi(x)$ が定数であることを示すことである．$g(x)$ を $\log\varphi(x)$ の 2 階導関数とすると，$g(x)$ も周期 1 の周期関数となる．等式 (4.3) より，関数等式

$$\frac{1}{4}\left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = g(x) \tag{4.4}$$

を満たす[1] $g(x)$ は区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続なので，この区間で有界である．つまり $|g(x)| \leq M$ と書ける．しかし $g(x)$ は周期関数なので，この不等式はすべての x に対して成り立つ．

次に $g(x)$ が零になることを，ヘルグロッツ (Herglotz) 氏の論法を使って示す．等式 (4.4) より不等式

$$|g(x)| \leq \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq \frac{M}{4} + \frac{M}{4} = \frac{M}{2}$$

が成り立つ．これは上界が M から $\dfrac{M}{2}$ におさえられることを意味する．この過程をもう一度繰り返せば，上界を $\dfrac{M}{4}$ にできる．つまり言い換えると，$g(x)$ の上界はいくらでも小さくできるのである．これは $g(x) = 0$ であることを意味する．しかし $g(x)$ は $\log\varphi(x)$ の 2 階導関数なので，$\log\varphi(x)$ は 1 次関数となる．さらに $\log\varphi(x)$ は周期関数なので，定数でしかありえない．ゆえに $\varphi(x)$ も定数となる．我々はすでに $\varphi(x)$ の 1 つの値を知っている．すなわち $\varphi(0) = \pi$ である．よってすべての x に対して $\varphi(x) = \pi$ となる．

等式 (4.1) の $\varphi(x)$ の定義を思い出すと

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{4.5}$$

を得る．これはしばしばオイラーの関数等式とよばれる．この式に $x = \dfrac{1}{2}$ を代入すると等式 (2.14) の新たな証明が得られる．ルジャンドルの関係式の定数の正確な値は使わなかったので, 等式 (2.14) のこの証明は，したがって第 3 章で行ったものとは独立である．

式 (2.2) を使って式 (4.5) を

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)}$$

---

[1] 訳註　$f(x) = \dfrac{d}{dx}\log\varphi(x)$ とおくと，$g(x) = f'(x)$ である．(4.3) より

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

を得る．これを再度微分して (4.4) を得る．

と書くことができる．そこで $\Gamma(x)$ と $\Gamma(-x)$ をワイエルシュトラスの積公式 (2.8) で置き換えよう．すると $\sin\pi x$ の無限積[2]による表示

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right) \tag{4.6}$$

を得る．

この $\sin\pi x$ の無限積展開 (無限積展開にはいくつかの別証明があるが[3]それ) から出発して直接計算により式 (4.5) を得ることができる[4]．我々の方法は式 (4.5) と式 (4.6) を同時に得ることができる点でより好ましいものである．解析学における式 (4.6) の重要性については関数論の本を参照されたい[5]．

この章の主要な結果を次の定理の形に定式化しておこう．

定理 4.1 連続な 2 階導関数をもちかつ関数等式 (4.3) を満足する正の周期関数は定数である．

---

[2]訳註 本書を読むにあたって「無限積」の項を参照のこと．

[3]たとえば E. ハイラー・G. ワナー著，蟹江訳『解析教程 上』シュプリンガー・フェアラーク東京 P.87〜90 に証明の素描がある．また，本シリーズ『複素数の世界』p.175〜181 には証明が与えられている．

[4]訳註 ワイエルシュトラスの積公式 (2.8) により

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= -x\Gamma(x)\Gamma(-x)\\ &= -x\left(e^{-Cx}\frac{1}{x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}\right)\left(e^{Cx}\frac{-1}{x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{\nu}}}{1-\frac{x}{\nu}}\right)\\ &= \frac{1}{x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{\nu^2}}\right)\end{aligned}$$

となり，この最後の式は

$$\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

に他ならない．

[5]訳註 たとえば本シリーズ『複素数の世界』を参照のこと．

第 5 章……………

定積分への応用

先に出てきた 2 つのオイラー積分については，さまざまな自明な変形を含んだかたちで多くの文献で取り扱われている．ここではそのうち重要な結果のうち，いくつかをかいつまんで記すことにしよう．式 (2.1) で $e^{-t}=\tau$ とおき τ についての積分としたのち，τ を t に変えると，

$$\Gamma(x)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^{x-1}dt \tag{5.1}$$

を得る．同様に $t^x=\tau$ という置き換えによって式 (2.1) は

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-\tau^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{x}d\tau.$$

となる．ここで x を $\dfrac{1}{x}$ で置き換える．

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right)=\int_0^\infty e^{-t^x}dt. \tag{5.2}$$

ここで $x=2$ の場合を考えると非常に興味のある式となる．

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{5.3}$$

このような変形は無数に考えることができる．もうひとつ解析的数論において重要な例をあげてみよう．$a>0$ に対し $t=a\tau$ とおくと次の積分が得られる[1]．

---

[1]訳註　この等式を a が正整数の場合に適用して和を取ることによってリーマンのゼータ関数

$$\frac{\Gamma(x)}{a^x} = \int_0^\infty e^{-at} t^{x-1} dt. \tag{5.4}$$

再度，オイラーの第一積分 (2.13) をみてみよう．$t = \dfrac{\tau}{\tau+1}$ と $\sin^2\varphi$ という置換により次のような式が得られる．

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{5.5}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{2x-1}(\cos\varphi)^{2y-1} d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{5.6}$$

等式 (2.13) で $y = 1-x$ とおくと，等式 (4.5) より次のような興味深い結果を得る．

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1, \tag{5.7}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1, \tag{5.8}$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan\varphi)^{2x-1} d\varphi = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1. \tag{5.9}$$

x と y が共に有理数ならば式 (2.13) は代数関数の積分となる．(2.13) で $x = \dfrac{m}{n}$, $y = \dfrac{1}{2}$ とおき $t = \tau^n$ と置換すると

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}} dt = \frac{\Gamma(\frac{m}{n})\sqrt{\pi}}{n\Gamma(\frac{m}{n}+\frac{1}{2})} \tag{5.10}$$

$m = 1$ で $n = 4$ または $n = 3$ のとき，(3.11), (4.5) を用いて次のような具体的数値に関する結果を得る．

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{\sqrt{32\pi}}, \tag{5.11}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

の積分表示

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1-e^{-t}} dt$$

を得る．この等式を使ってゼータ関数を全複素平面に解析接続することができる．

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{\sqrt{3}\sqrt[3]{16}\pi}. \tag{5.12}$$

これは，これらの特別な数と楕円積分[2]を関係づけるものである．

スターリングの公式の誤差の積分表示も分かる．

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{t+x}dt = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$$

なので，式 (3.9) の級数は次のような形で書くこともできる．

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{t+n+x}dt.$$

次のような不連続関数を考える．

$$H(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}-t, & 0<t<1 \\ 0, & t=0 \\ \text{それ以外は周期 1 で周期的} & \end{cases}$$

そうすると，

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{H(t)}{t+n+x}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{H(t)}{t+x}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{H(t)}{t+x}dt$$

を得る．被積分関数は t が無限大に向かうとき振動しながら 0 に近づくので次の積分が存在する．

$$\mu(x) = \int_0^{\infty}\frac{H(t)}{t+x}dt. \tag{5.13}$$

式 (5.13) はスターリングの公式の改良であるスターリング級数を導く第一のステップである．さて，次の関数を導入しよう．

---

[2]訳註　$P(x)$ が重根を持たない 3 次または 4 次式のとき，積分

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{P(x)}}dx$$

を (第一種) 楕円積分という．楕円関数論の誕生の契機となった積分である．

$$H_{2n}(t) = 2(-1)^{n-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu\pi t}{(2\nu\pi)^{2n}}$$

$$H_{2n-1}(t) = 2(-1)^{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi t}{(2\nu\pi)^{2n-1}} \tag{5.14}$$

$-H_1(t) = H(t)$ だと分かる．なぜなら $-H_1(t)$ は $H(t)$ のフーリエ級数[3]だからである．$n \geq 2$ に対して級数 $H_n(t)$ はすべての t について絶対かつ一様収束である．$n = 1$ のときには整数を含まない閉区間内で一様収束する．それゆえ (5.14) から

$$H'_{n+1}(t) = H_n(t) \tag{5.15}$$

が導かれる．$n \geq 2$ 対して，(5.15) はすべての t について成り立ち，$n = 1$ のときは非整数 t に対して成り立つ．$H_{n+1}(t)$ はつねに連続だから (5.15) から

$$\int_0^t H_n(t)dt = H_{n+1}(t) - H_{n+1}(0) \tag{5.16}$$

が成り立つ．この関数 $H_n(t)$ は周期 1 の周期関数である．だから $0 \leq t < 1$ のみで考えればよい．$H_1(t)$ はこの区間において多項式だから，$H_n(t)$ はこの区間で多項式でなければならない．多項式の係数は有理数である．これは帰納法により示される．主張は $n = 1$ のとき正しい．我々は $H_n(t)$ において成り立っていると仮定する．これは

$$\int_0^t H_n(t)dt$$

が有理多項式であることを表している．よって，$H_{n+1}(0)$ が有理数であることを示せば十分である．$n+1$ が奇数のとき (n が偶数のとき)$H_{n+1}(0) = 0$ である．$n+1$ が偶数のとき $\varphi(t)$ が有理多項式であるとして，$H_{n+1}(t) = \varphi(t) + H_{n+1}(0)$ とできる．もしこの式を積分したら (5.16) を使って式

$$H_{n+2}(t) - H_{n+2}(0) = H_{n+2}(t) = \int_0^t \varphi(t)dt + H_{n+1}(0)t$$

[3]訳註　本書を読むにあたって「フーリエ級数」式 (27) を参照のこと．

を得る．なぜなら $n+2$ は奇数だからである．一方 (5.14) から $H_{n+1}(1)$ が 0 であることが分かるので，

$$0 = \int_0^1 \varphi(t)dt + H_{n+1}(0) \tag{5.17}$$

得る．このようにして $H_{n+1}(0)$ が計算でき，$H_{n+1}(0)$ が有理数になることが示される．いまや (5.13) を望む形に書き換えることができる．部分積分を繰り返すと，

$$\mu(x) = \frac{H_2(0)}{x} + \frac{H_3(0)1!}{x^2} + \frac{H_4(0)2!}{x^3} + \cdots + \frac{H_n(0)(n-2)!}{x^{n-1}} - \int_0^\infty \frac{H_n(t)(n-1)!}{(t+x)^n}dt \tag{5.18}$$

を得る．簡単な計算で (5.18) の最後の 2 項の和が次の式と等しいことが分かる．

$$\int_0^\infty \frac{(H_n(0) - H_n(t))(n-1)!}{(t+x)^n}dt$$

もし n が偶数なら $H_n(0) - H_n(t)$ は $H_n(0)$ とすべての t について同符号である．したがって上の積分は $H_n(0)$ や $H_n(0) - H_n(t)$ と同符号である．さらに (5.14) により $H_{2n+1}(0) = 0$ であることが分かる．同時に $H_{2n}(0)$ の値の符号は正と負で交互に入れ替わる．これにより部分和

$$\frac{H_2(0)0!}{x} + \frac{H_4(0)2!}{x^3} + \cdots + \frac{H_{2n}(0)(2n-2)!}{x^{2n-1}}$$

は $\mu(x)$ よりも大きくも小さくもなる[4]．言い換えると任意の n について以下の式が成り立つような $0 < \theta < 1$ が存在する．

$$\mu(x) = \frac{H_2(0)0!}{x} + \frac{H_4(0)2!}{x^3} + \cdots + \frac{H_{2n-n}(0)(2n-4)!}{x^{2n-3}} + \theta\frac{H_{2n}(0)(2n-2)!}{x^{2n-1}}, \quad 0 < \theta < 1 \tag{5.19}$$

級数が発散するので，(5.19) の極限はとれない．しかし n がそんなに大きく

[4] 訳註　$0! = 1$ と約束する．

ない限り，非常に有用な近似値を与える[5]．たとえば $n=8$ のときは

$$\mu(x)=\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\frac{\theta}{1680x^7} \tag{5.20}$$

のような近似値をえる．

かくして $\Gamma(x)$ の計算法が分かった．たとえば，区間 $4 \leq x \leq 5$ ならば (5.20) を使うと $\mu(x)$ を小数点以下第 6 位まで正確に計算することができる．(3.9) の最初の公式を使ったら，同じくらい正確に $\log \Gamma(x)$ の対数の値を得られる．関数方程式 (2.2) を使うことによって区間 $[1,2]$ における $\Gamma(x)$ の値を出すことができる．こうして任意の x において $\Gamma(x)$ を計算できる．もし x がとても大きいなら，(3.9) を直接使うことができる．

ベルヌーイ (Bernoulli) 数を知っている人なら $H_n(0)$ との関係に気づくだろう．読者自ら調べてほしい[6]．

---

[5]訳註　発散級数であるにも関わらず有限の項の和がよい近似を与えることは漸近展開の理論から出てくる．たとえば大久保・河野著『漸近展開』(教育出版) を参照のこと．

[6]訳註　ベルヌーイ数 B_n は級数展開を使って

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

として定義される．$B_0=1$, $B_1=\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}$ であり，ベルヌーイ数はすべて有理数である．リーマン (Riemann) のゼータ関数に関して，数 m に対して

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}}{(2m)!}$$

であることはオイラーが証明した．ベルヌーイ数に関しては B_{2n} を B_n と書く場合も多いので記号の使い方に注意する必要がある．

第 6 章……………

関数等式による $\Gamma(x)$ の特徴付け

ガンマ関数に対する 3 つの本質的に異なる関数等式，つまり関数等式 (2.2)，乗法公式 (3.10) とオイラーの関数等式 (4.5) を学んだ．ガンマ関数はこの等式の 1 つ，あるいは組み合わせによって，どれくらいまで決定されるのだろうか．

しばらく，$f(x)$ は任意の関数で $\varphi(x)$ が商 $\dfrac{f(x)}{\Gamma(x)}$ を表すとし，$f(x)$ が式 (2.2), (3.10) または (4.5) のような形の関数等式をみたすと仮定しよう．すると，$\varphi(x)$ は対応する次のような関数等式を明らかにみたす．

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) \tag{6.1}$$

$$\varphi\left(\frac{x}{p}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\varphi\left(\frac{x+1-p}{p}\right) = \varphi(x) \tag{6.2}$$

$$\varphi(x)\varphi(1-x) = 1 \tag{6.3}$$

たとえば $f(x)$ がルジャンドルの関数等式 (3.11) を満たせば

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) \tag{6.4}$$

が成立する．

簡単のため，今後 $f(x)$ は関数等式 (2.2) を満たすと仮定しよう．したがって $\varphi(x)$ は周期 1 の周期関数であり，つまり式 (6.1) を満たすと仮定する．さらに $f(x)$ はしたがって $\varphi(x)$ もすべての x に対して連続であるとも仮定しよう．式 (6.1) より正数 x に対して $\varphi(x)$ は連続性であるので，$\varphi(x)$ はその値

が正しく定義される限り，0 および負の整数において連続であることが導かれる．さらに式 (6.2) または (6.3) が成り立てば，すべての x に対して連続性のためにこれらの等式が成り立つ．

さらに，x が正のとき，つねに $f(x)$ が正だと仮定すれば，$\varphi(x)$ の対数は連続である．$\log\varphi(x)$ を $g(x)$ で書き換えれば，関数等式は ($g(x+1)=g(x)$ に加えて)

$$g\left(\frac{x}{p}\right)+g\left(\frac{x+1}{p}\right)+\cdots+g\left(\frac{x+p-1}{p}\right)=g(x), \tag{6.5}$$

$$g(x)=-g(1-x)=-g(-x), \tag{6.6}$$

$$g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)=g(x) \tag{6.7}$$

となる．

$f(x)$ が連続な 2 階導関数を持てば，$\varphi(x)$ もそうである．いまこれがそうであるとしよう．そして $\varphi(x)$ が式 (6.4) を満たすとしよう．そうであれば，$\varphi(x)$ は定数でなければならない．これは第 4 章の最後で証明された定理 4.1 から従う．式 (6.4) から，この定数の値は 1 でなければならない．言い換えれば，$f(x)=\Gamma(x)$ なのである．

定理 6.1　ガンマ関数は正数 x に対して正でありかつ連続な 2 階導関数を持ち，式 (2.2) と式 (3.11) を満足する唯一の解である．

この定理 6.1 はルジャンドルの関数等式の重要性を示している．次の段階として，連続な 2 階導関数の仮定を弱めることができるかどうかを，考察しよう．実のところ，連続な 1 階導関数の存在で十分であることが示せる．

まず，一般的な考察から始めよう．式 (6.5) はそれぞれの p の値に対応する多くの関数等式を代表している．しかしながら，これらの等式がお互いにまったく関係がないというわけではない．等式 (6.5) が整数 p_1,p_2 に対して成立すると仮定する．この等式を，整数 p_1 と変数 $\dfrac{x+k}{p_2}$ に対して適用すると，等式

$$\sum_{\nu=0}^{p_1-1} g\left(\frac{x+k+\nu p_2}{p_1p_2}\right)=g\left(\frac{x+k}{p_2}\right)$$

を得る．さて，この等式の k を 0 から p_2-1 まで変化させ，その和をとる．右辺からは，等式 (6.5) が p_2 に対して成立することから $g(x)$ を得る．ところで，$k+\nu p_2$ は 0 から p_1p_2-1 までのすべてをとる．このことから，等式

$$\sum_{\mu=0}^{p_1p_2-1} g\left(\frac{x+\mu}{p_1p_2}\right) = g(x)$$

が得られる．したがって等式 (6.5) は積 p_1p_2 に対しても成立していることが分かる．

このことに留意して，等式 (6.7)(「ルジャンドルの関数等式」) の成立を仮定しよう．すると，等式 (6.5) は 2^n の形をとるすべての整数に対して成り立ち，それゆえ任意の大きな $p=2^n$ に対して成立する．より一般的には，式 (6.5) がある整数 q に対して成り立つとすると，この等式はその整数のべきに対しても成り立ち，したがって任意の大きな整数 $p=q^n$ に対しても成り立つ．

さて式 (6.5) の両辺の導関数をとると

$$\frac{1}{p}\left(g'\left(\frac{x}{p}\right)+g'\left(\frac{x+1}{p}\right)+\cdots+g'\left(\frac{x+p-1}{p}\right)\right)=g'(x) \qquad (6.8)$$

を得る．正の x 軸を原点から $\dfrac{1}{p}$ の長さに分割していく．式 (6.8) の左辺の変数は p 個の連続する分割に収まっている．$g'(x)$ は周期 1 の周期関数なので，0 から 1 までの間の各分割から関数の値を得られる．ところで，式 (6.8) が任意の大きな $p=q^n$ に対して成り立つ．p が無限大へと近づくにつれて，等式 (6.8) の左辺は積分

$$\int_0^1 g'(x)dx = g(1)-g(0)=0$$

へと収束する．このことはすべての x にたいして，$g'(x)=0$ を意味し，その結果，$g(x)$ は定数 (関数) となる．式 (6.5) の表すどのような等式からも明らかなように，この定数の値は 0 である．このことから次の定理が証明された．

定理 6.2　ガンマ関数は，正である x に対して正の値をとり，式 (2.2) と，ある整数 p に対し式 (3.10) を満たす唯一の定数でない連続な関数である．

さて，連続性があれば十分だと思いたくなるかもしれない．これは正しくない．次の級数で定義される関数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^n \pi x), \tag{6.9}$$

は級数が一様収束するので連続である[1]．$g(x)$ は周期関数で，また (6.7) を満たすのも明らかである[2]．しかし $g(x)$ は恒等的に 0 とは等しくない．さらに定数でもない．なぜなら

$$g(0) = 0, \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

だからである．

さて，我々が連続性のみから出発するならば，定理 6.2 が得られるために，そのほかのどんな特性が仮定されればよいだろうか．等式 (6.6) だけでは定理 6.2 を得るのには不十分である．実際，関数 (6.9) は (6.6) も満たしている．ある 1 つの数 p に対して (6.5) が成立しても不十分である．同様の反例を任意の p に対してつくることができる．しかし関数 $g(x)$ がすべての整数 p に対して (6.5) を満たすとすれば，どうなるであろうか．ガンマ関数に関する考察のまとめとしてこの性質が十分であることを示そう．

この事実を示すために，我々はフーリエ級数に関するいくつかの事実をつかう[3]．$f(x)$ を積分可能な周期 1 の関数としよう．

$$c_\nu = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i \nu x} dx = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x) e^{-2\pi i \nu x} dx,$$

ここに α は任意の実数である．$f(x)$ に級数

---

[1]訳註　本書を読むにあたって「一様収束」定理 8 を参照のこと．

[2]訳註　$n \geq 2$ のとき

$$\frac{1}{2^n}\left\{\sin\left(\frac{2^n \pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{2^n \pi(x+1)}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2^{n-1}} \sin(2^{n-1}\pi x),$$
$$\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right) + \sin\frac{2\pi(x+1)}{2}\right\} = 0$$

を使う．絶対収束するので和の順序を変更できることに注意する．本書を読むにあたって「ベキ級数」定理 6 の項を参照のこと．

[3]訳註　本書を読むにあたって「フーリエ級数」の項を参照のこと．

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

を対応させる．ただし，この級数の収束性は考慮しないものとする．この対応を

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

で表し，右辺の級数を $f(x)$ のフーリエ級数という．2 つの関数の和のフーリエ級数は，2 つのフーリエ級数の和であることはただちに分かる．

$f(x+\alpha)$ のフーリエ級数は係数

$$\begin{aligned} d_\nu &= \int_0^1 f(x+\alpha)e^{-2\pi i\nu x}dx = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)e^{-2\pi i\nu(x-\alpha)}dx \\ &= e^{2\pi i\nu\alpha}\int_\alpha^{\alpha+1} f(x)e^{-2\pi i\nu x}dx \end{aligned}$$

をもつ．したがって $d_\nu = e^{2\pi i\nu\alpha}c_\nu$ である．これより $f(x+\alpha)$ のフーリエ級数は $f(x)$ のフーリエ級数に $x \to x+\alpha$ という代入をすることによって得られることが分かった．

k を 1 以上の整数とする．関数 $f(kx)$ のフーリエ係数 d_ν は

$$\begin{aligned} d_\nu &= \int_0^1 f(kx)e^{-2\pi i\nu x}dx = \frac{1}{k}\int_0^k f(x)e^{\frac{-2\pi i\nu x}{k}}dx \\ &= \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\int_{m-1}^{m} f(x)e^{\frac{-2\pi i\nu x}{k}}dx = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\int_0^1 f(x)e^{\frac{-2\pi i\nu(x+m-1)}{k}}dx \\ &= \frac{1}{k}\left(\sum_{m=1}^{k} e^{\frac{-2\pi i\nu(m-1)}{k}}\right)\int_0^1 f(x)e^{\frac{-2\pi i\nu x}{k}}dx \end{aligned}$$

で与えられる．上記の最後の式における和は，公比 $e^{\frac{-2\pi i\nu}{k}}$ をもつ等比級数である．もし ν が k で割り切れるならば，和のそれぞれの項は 1 であり，$\nu = \mu k$ とおくと，

$$d_{\mu k} = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i\mu x}dx = c_\mu$$

という式を得る．もし ν が k で割りきれなければ $e^{\frac{-2\pi i\nu}{k}} \neq 1$ で，その等比級数の和の公式から $d_\nu = 0$ となる[4]．したがって次の式が成り立つ．

$$f(kx) \sim \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu e^{2\pi i\mu kx}.$$

$f(kx)$ のフーリエ級数は $f(x)$ の x に kx を代入して得られる．

もし $f(x)$ が連続でフーリエ級数が特定の値 x_0 について収束するなら，フーリエ級数の $x = x_0$ における値は関数値 $f(x_0)$ に等しい．読者はこの事実の証明をフーリエ級数の大抵の本で見つけることができよう[5]．

実際に，フェイェル (Fejer) の定理の結果によると，連続関数 $f(x)$ のフーリエ級数は必ず総和可能で (たとえそれが収束しなくても)，総和は $f(x)$ となる[6]．

さて，証明に入ろう．$g(x)$ がすべての整数 p に対して (6.5) を満たすとする．x を px に置き換えると (6.5) から

$$g(x) + g\left(x + \frac{1}{p}\right) + \cdots + g\left(x + \frac{p-1}{p}\right) = g(px) \tag{6.10}$$

がいえる．$g(x)$ のフーリエ級数を

$$g(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

とすると

$$g\left(x + \frac{m}{p}\right) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x} e^{\frac{2\pi i\nu m}{p}}$$

かつ

---

[4]訳註　ν が k の倍数でなければ

$$\sum_{n=1}^{k} e^{\frac{-2\pi in}{k}} = \frac{e^{\frac{-2\pi i}{k}} - e^{\frac{-2\pi i(k+1)}{k}}}{1 - e^{\frac{-2\pi i}{k}}} = 0$$

[5]訳註　本書を読むにあたって「フーリエ級数」定理 12 とそこにあげられた文献を参照のこと．

[6]訳註　本書を読むにあたって「フーリエ級数」定理 13 を参照のこと．

$$g(px) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu px} \tag{6.11}$$

がいえる．これらを (6.10) に代入すると，

$$\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x} e^{\frac{2\pi i\nu m}{p}} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}\left(\sum_{m=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i\nu m}{p}}\right)$$

が左辺のフーリエ級数であることが分かる．

上で述べたように

$$\sum_{m=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i\nu m}{p}}$$

は ν が p で割り切れるならば，値 p をとり，ν が p で割りきれなければ，0 をとる．それゆえ $g(px)$ のフーリエ級数は

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} pc_{\mu p} e^{2\pi i\mu px}.$$

この結果を (6.11) と比較してみると

$$c_\mu = pc_{\mu p}$$

がいえる．特に $\mu = 1, -1, 0$ のとき

$$c_p = \frac{c_1}{p}; \quad c_{-p} = \frac{c_{-1}}{p}; \quad c_0 = 0$$

となる．式 (6.5) がすべての整数 $p \geq 1$ に対して成立することを仮定したので，

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{c_1}{\nu}e^{2\pi i\nu x} + \frac{c_{-1}}{\nu}e^{-2\pi i\nu x}\right)$$

を得る．しかし $g(x)$ は実数値関数であり，それゆえ

$$g(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\nu}\sin 2\nu\pi x + \frac{b}{\nu}\cos 2\nu\pi x\right).$$

の形のフーリエ級数を持たなければならない[7]．級数

[7]訳註　オイラーの関係式

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu}$$

と級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu}$$

はそれぞれ関数 $\pi H(x)$ と $-\log(2\sin\pi x)$ のフーリエ級数になっている[8]. $H(x)$ は第 5 章で導入した関数を表す．それゆえ連続であるすべての点で

$$g(x) = a\pi H(x) - b\log(2\sin\pi x)$$

が成り立つ．一方，関数 $H(x)$ は有界で $-\log(2\sin\pi x)$ は有界ではない．$g(x)$ は連続関数であるから，これより明らかに $b = 0$ である．しかし $H(x)$ は連続関数ではない．それゆえ $a = 0$ でなければならない．これで以下の定理が証明された．

定理 6.3 ガンマ関数は正の x に対して正の値をとり，すべての p の値に対して等式 (2.2) と (3.10) の等式を満たす唯一の連続関数である．

以上の関数等式によるガンマ関数の特徴付けは対数的凸性による特徴付けよりも本質的に複雑であることを指摘して，ガンマ関数入門を終えることとする．

$$\sin 2\nu\pi x = \frac{e^{2\pi i\nu x} - e^{-2\pi i\nu x}}{2i}, \quad \cos 2\nu\pi x = \frac{e^{2\pi i\nu x} - e^{-2\pi i\nu x}}{2}$$

を使う．

[8]本書を読むにあたって「フーリエ級数」(27), (28) を参照のこと．

付録

本書を読むにあたって

上野健爾

本書を読むにあたって

本文中に詳しく議論が展開されているが，ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は正整数の階乗 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ を実数 x にまで拡張したものである．正確には x が 0 と負の整数のところでは定義できず，また $\Gamma(n) = (n-1)!$ であり，階乗と 1 だけずれているが，これは本質的なことではない．

本書「ガンマ関数入門」の基本的なテーマは正整数 n での値が $(n-1)!$ である関数にどれほどの条件をさらに付け加えることによってガンマ関数を特徴づけることができるかという問題である．正の実数の範囲で連続な関数 (あるいはさらに強く微分可能な関数)$f(x)$ が $f(1) = 1$ かつ $f(x+1) = xf(x)$ を満足するだけではガンマ関数として特徴づけることはできない．これらの条件にさらに対数的に凸 (すなわち $\log f(x)$ が凸関数である，詳しくは第 1 章を参照のこと) であるという条件を付ければガンマ関数であることを示すことができることが，本書第 2 章で論じられている．このことを示すためにアルチンは大変巧妙な議論を展開している．その素晴らしさを理解するためには解析学の基本的な定理を使う必要がある．

これらの基本定理は今日では大学初年級の微積分学の講義でもきちんと取り扱われることが少なくなってきた．しかしながら，これらのことは，時間をかけてていねいに考えれば決して難しいものではない．また，本書のように基本的な定理を縦横に駆使してガンマ関数の基本的な性質を導き出していく議論を勉強することによって，基本的な定理の持つ意味を理解することが容易になってくる．ここでは，本書で登場する解析学の基本的な定理を簡単に解説し，本文を読むための一助としたい．

微積分の基本では数列の収束や連続関数に関するエプシロン・デルタ論法

は避けて通れない．本章では実数の基本的な性質をはじめとしてエプシロン・デルタ論法を随所で使うが，以下の説明を読めればその必要性を納得されることと思う．そのために，この章では基本的な定理の証明を，できうる限り直観的な形ではあるが，厳密な証明にすぐ書き換えることができる形で与えた．しかし，最初からすべてを理解することは難しいので，初読の際は証明の部分はとばしてもさしつかえない．本書を通読された後で再度本章を読めば，理解は容易になるであろう．

§1　実数の性質

「ガンマ関数入門」では実数の持つ性質として「有界な単調増加数列は必ず収束する」という事実が何度も使われている．これは実数の持つ基本的性質であるが，実数とは何であるかという問いに答えるのは簡単ではない．実数の持つ性質が明らかになり，デデキント (Dedekind) やカントール (Cantor) よって実数論が構成されたのは 19 世紀後半のことである．

ここでは，実数論を詳しく述べることはできないので，実数とは小数の全体であると考えることにする．しかしながら無限小数がどのような意味を持っているかは少し考察しておく必要がある．

$$\frac{1}{3} = 0.3333333333\cdots$$

の両辺を 3 倍すると

$$1 = 0.9999999999\cdots \tag{1}$$

となる．

$$a_1 = 0.9, \quad a_2 = 0.99, \quad \cdots, \quad a_n = 0.\underbrace{999\cdots99}_{n}, \cdots$$

という数列 $\{a_n\}$ を考えるとこの数列はある一定の数に近づき，この数を無限小数 $0.9999999999\cdots$ で表す．これが右辺の無限小数の意味である．(1) はこの数がじつは 1 に等しいことを意味している．

ここで，一般に数列 $\{b_n\}$ がある数 β に近づく (このことを数列 $\{b_n\}$ は β

に**収束**する，β は数列 $\{b_n\}$ の**極限値**であるという) ことの意味を正確に定義する必要がある．直観的に言えば，b_n と β との差の絶対値 $|b_n - \beta|$ がどんどん小さくなって行くことである．このことを $0.9999999999\cdots$ で確かめてみよう．

$$a_n = 0.\underbrace{99\cdots99}_{n}$$

とおくと

$$1 - a_n = 0.\underbrace{00\cdots00}_{n}1 = \frac{1}{10^{n+1}}$$

となる．したがって n が大きくなるに従って $|1 - a_n|$ がどんどん小さくなることが分かり，a_n は 1 に近づいていくことが分かる．このことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

と記す．$0.9999999999\cdots$ となにげなく書いたが，じつはこれは $\lim_{n\to\infty} a_n$ を意味するわけである．同様の考察で，たとえば

$$1.27 = 1.26999999\cdots$$

などが成り立つことも分かる．有限小数はこのように 9 が循環する無限小数としても表示できる．

さて，一般に無限小数

$$\beta.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n\beta_{n+1}\cdots$$

に対して (β は整数，β_j, $j = 1, 2, \cdots$ は 0 から 9 までの整数を表す) 小数点以下 n 位まで取ってできる有限小数 (これは有理数に他ならない) を

$$b_n = \beta.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n$$

と記すと無限小数 $\beta.\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n\beta_{n+1}\cdots$ の正確な意味は，この有限小数の列が収束し，その極限値

$$\lim_{n\to\infty} b_n$$

が表す数のことである．

小数点以下 n 位は $\dfrac{1}{10^n}$ を表すから b_n と b_{n+1} との差は $\dfrac{1}{10^n}$ 以下である．したがって数列 $\{b_n\}$ は収束するように思われる．私たちは無限小数が数を決めると信じて疑わないが，よくよく考えてみるとこれはどのような無限小数に対しても数列 $\{b_n\}$ が収束することを意味する．この事実は決して当たり前のことではない．

無限小数は必ず 1 つの数を決定するということを公理として実数論を展開することができる (これは有理数の列の極限として実数を定義することを意味する) が，デデキントの実数論のように，別の形で実数を定義すれば証明する必要がある事実になる．ここでは，高校数学の直観的な実数の定義に基づき，無限小数の全体を実数と考えることにしよう[1]．

まず，必要な言葉を用意しよう．数列 $\{c_n\}$ は

$$c_1 \leq c_n \leq c_3 \leq \cdots \leq c_n \leq c_{n+1} \leq \cdots \qquad (2)$$

が成り立つとき，**単調増加数列**という．等号を許していることに注意しよう．またすべての n に対して

$$c_n < M, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

が成り立つような数 M を見出すことができるとき，数列 $\{c_n\}$ は**上に有界**であるという．

さて，本書で使われる実数の基本的な性質は次の定理である．

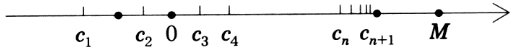
定理 1　単調増加する上に有界な数列は必ず収束する．

次のように考えるとこの定理の主張はほとんど自明なことになる．上に有界な単調増加数列 $\{c_n\}$ が与えられたとき，c_n を小数で表す．

---

[1] 高校までの数学では無限小数の四則演算 (加減乗除) は不思議なことに一度も取扱われることがない．有限小数の計算は小数点以下最下位から計算するから，そのままでは無限小数に適用できない．実際にはそろばんでの計算のように一番上の位から計算するか，あるいは無限小数 α, β が有限小数の列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の極限値であるとき $\alpha \pm \beta$ は $\{a_n \pm b_n\}$ の極限値，$\alpha \times \beta$ は $\{a_n \times b_n\}$ の極限値，$\alpha \div \beta$ は $b_n \neq 0$ の部分のみをとり出して $\{a_n \div b_n\}$ の極限値として定義する．正確にはこれらの極限値が存在することを示す必要がある．

$$c_j = \alpha^{(j)}.\alpha_1^{(j)}\alpha_2^{(j)}\cdots\alpha_n^{(j)}\cdots$$



このとき，有限小数で表すことができるときは必ず有限小数を取ることにし，最後に 9 が循環する無限小数は現れないようにしておく．仮定よりすべての j に対して $c_j < M$ であるので c_j の整数部分 $\alpha^{(j)}$ も M より小さい．しかも数列は単調増加であるので

$$\alpha^{(1)} \leq \alpha^{(2)} \leq \cdots \leq \alpha^{(n)} \leq \cdots < M$$

が成り立つので，ある番号から先は同じ整数部分を持つことになる．

$$\alpha = \alpha^{(m_0)} = \alpha^{(m_0+1)} = \alpha^{(m_0+2)} = \cdots$$

次に，同様の考えによって

$$\alpha.\alpha_1^{(m_0)} \leq \alpha.\alpha_1^{(m_0+1)} \leq \alpha.\alpha_1^{(m_0+2)} \leq \cdots < M$$

が成り立つことが分かる．M より小さい小数点第 1 位までの数は有限個しかないので，無限個の不等式から，ある番号から先は小数点第 1 位の数も一致しなければならないことが分かる．

$$\alpha.\alpha_1^{(m_1)} = \alpha.\alpha_1^{(m_1+1)} = \alpha.\alpha_1^{(m_1+2)} = \cdots$$

以下同様の考えによって，ある番号から先は小数点以下 n 位まで同じ数値であることが分かる．このようにして，数列が収束していくことが分かる．

この定理は実数の持つ基本的な性質を表していて，本書でも大切な働きをする．この定理の応用として級数の和を考えよう．数列 $\{a_n\}$ に対して無限和

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

を**無限級数**，あるいは単に級数ということがある．この無限級数 (無限和) を和の記号 Σ を使って

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{3}$$

と記そう．n 項までの和

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

からできる数列 $\{A_n\}$ が収束するとき，無限和 (3) は意味を持つ．このことを無限級数 (3) は収束するという．数列 $\{A_n\}$ が収束しないときは無限和は意味を持たない．このことを無限級数 (3) は収束しない，あるいは**発散する**という．たとえば数列 $\{a_n = (-1)^n\}$ からできる無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \tag{4}$$

を考えてみよう．この n 項までの和は

$$A_n = \begin{cases} 0, & n \text{ は偶数} \\ 1, & n \text{ は奇数} \end{cases}$$

となるので，数列 $\{A_n\}$ は 1 と -1 を振動して収束しない．したがって無限級数 (4) は収束しない．

一般に級数が収束するかどうかを判定するのは難しい．しかし

$$a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

であるとき，無限級数 (3) を**正項級数**というが，この場合は定理 1 を使って収束の判定ができる場合が多い．正項級数の場合は n 項までの部分和からできる数列 $\{A_n\}$ は単調増加である．したがって，この数列が上に有界であるかないかによって級数は収束するかどうかが分かる．簡単な例として，調和級数とよばれる無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \tag{5}$$

を考えてみよう．

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\cdots+\frac{1}{32}>\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

となり，一般に

$$\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}>\frac{2^m}{2^{m+1}}=\frac{1}{2}$$

が成り立つ．したがって

$$A_4>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2, \quad A_8>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

となり，一般に

$$A_{2^n}>1+\frac{1}{2}n$$

が成り立つ．したがって数列 $\{A_n\}$ は上に有界でなく，A_n は n が大きくなるに従ってどんどん大きくなっていく．このことを調和級数 (5) は無限大に発散する，あるいは単に発散するという．

一方，無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots \tag{6}$$

は収束することが次のようにして示される．

図より

$$A_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x^2}\,dx=1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{n+1}=2-\frac{1}{n+1}$$

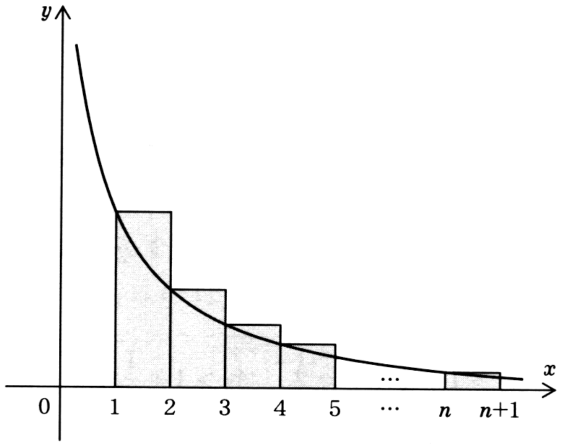
が成り立つ．したがって，

$$A_n<2$$

がなりたち，この場合数列 $\{A_n\}$ は上に有界であることが分かる．

同様の議論によって

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} \tag{7}$$



は $s>1$ のとき収束し，s に関する関数となる．これを**リーマンのゼータ関数**といい，数論で重要な働きをする関数である．

ところで，上に有界な単調増加数列 $\{c_n\}$ に対して $d_n=-c_n$ とおくと数列 $\{d_n\}$ は下に有界な単調減少数列になる．ここで，すべての n に対して

$$N<d_n$$

となるような数 N があるとき，数列は**下に有界**であるという．また，数列が

$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \cdots \geq d_n \geq d_{n+1} \geq \cdots$$

が成り立つとき，数列 $\{d_n\}$ は**単調減少数列**であるという．下に有界な単調減少数列 $\{d_n\}$ に対して，逆に $c_n=-d_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は上に有界な単調増加数列になり，したがって定理1により数列 $\{c_n\}$ は γ に収束する．すると $\{d_n\}$ は $-\gamma$ に収束しなければならない．したがって，次の定理が成り立つことが分かる．

定理 2　単調減少する下に有界な数列は必ず収束する．

次にこれまで直観的にすませてきた数列 $\{a_n\}$ が数 α に収束することの正確な定義を書いておこう．

定義 1　数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき正の数 ε をどのように選んでも $m \geq m_0$ であれば

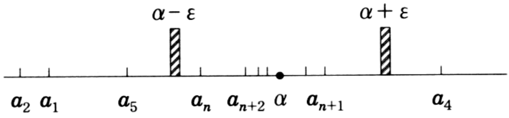
$$|a_m - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つように m_0 を見つけることができるとき (m_0 は ε によって変わってくる)，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と記す．

いささか分かり難い表現であるが，次のようにしてこの定義を直観的に捉えることができる．数直線上に α を中心にして前後 ε の所に関門を設ける．数列 $\{c_j\}$ に現れるどのような数がこの 2 つの関門を通り抜けるかを考えよう．定義の条件は，$m \geq m_0$ であればこの 2 つの関門の間に c_m がすべて入ってしまうような m_0 があることを主張する．数 m_0 は ε によって違ってくるが，ε をどんなに小さくしてもある番号から先の c_n は必ず関門の中に入ってしまう．



ε をどんどん小さくしていくと関門はどんどん α に近づいていく．したがって n が大きくなれば a_n は α に近づかざるを得ないということは直観的に明らかであろう．定義の中で『ε をどのように選んでも』という表現があるが，このことを通常『任意の ε に対して』と表現することが多い．これは ε を自由に取ることができることを意味する．大きな ε をとれば α の近くに関門をつくることはできないが，ε を自由に取ることができることから，ε を逆にどれほど小さく取っても，α から前後 ε の位置にある関門の中に a_n がある番号から先がすべて入ってしまうことが収束の定義である．上の絵を見ながらよく考えてみて欲しい．

ところで，多くの教科書では上の定義を次のような文章で記している．

任意に与えられた ε に対して m_0 が存在して，$m \geq m_0$ であれば $|\alpha_m - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するという.

この文章では意味をつかむのが難しい．収束の基本は任意の ε に対して (すなわち，ε をどのように与えても)

『$m \geq m_0$ であれば $|\alpha_m - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ』

ように m_0 を見出すことができるかどうかにかかっているのであるが，上の文章からそのような意味を読みとることは不可能である．この文章は英語

For any ε there exisits a number m_0 such that we have $|a_m - \alpha| < \varepsilon$ for any $m \geq m_0$.

の直訳である．英語の文章では m_0 の存在が主要な点であることはすぐに読みとることができるから，上の訳は誤訳といった方がよい．それにも関わらず，この誤訳が広く使われているのは英語の such that にあたる構文が日本語にないためである．日本語として正確さを期するためには定義 1 の文章も次のように書き換えた方が良いと思われる.

正の数 ε をどのように選んでも次の条件を満足する m_0 も見出すことができるとき，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するという.

(条件)　『$m \geq m_0$ であれば $|a_m - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ』

さて数列 $\{a_n\}$ が α に収束すれば，任意の正の数 ε に対して $n \geq m_1$ であれば

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

がつねに成り立つように m_1 を選ぶことができる．(こう記すと奇妙に感じられるのであれば，上の定義で ε のかわりに $\dfrac{\varepsilon}{2}$ を取ったと考えればよい．) すると $n, m \geq m_1$ であれば，いつでも

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \alpha) - (a_m - \alpha)| \leq |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち，任意の正の数 ε に対して $n, m \geq m_1$ であればつねに

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つように m_1 を選ぶことができる．

この性質を持つ数列 $\{a_n\}$ をコーシー列という．正確に定義の形に書いておこう．

定義 2　正の数 ε をどのように選んでも次の性質を満足するように m_1 を見出すことができるとき，数列 $\{a_n\}$ を**コーシー列**という．

(性質)　$m, n \geq m_1$ であれば

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

が成り立つ．

上で示したことは，**収束する数列はコーシー列である**ということである．これの逆が成り立つことが実数の持つ重要な性質である．

定理 3　コーシー列 $\{a_n\}$ は収束する．したがって数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は $\{a_n\}$ がコーシー列であることである．

一見奇妙なこの定理も数列 $\{a_n\}$ を数直線上に描いてみるとそれほど不思議でもなくなる．n, m がどんどん大きくなると a_n と a_m との差がどんどん小さくなることを意味するからである．



ちなみにコーシー列は必ず有界数列である．なぜならば，ε に対して $n, m \geq m_1$ であれば

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つように m_1 を選ぶことができるので，特に $n > m_1$ であれば $|a_n -$

$a_{m_1}| < \varepsilon$ が成り立ち

$$|a_n| < |a_{m_1}| + \varepsilon, \quad n > m_1$$

が成り立つからである．このとき，数直線上に並んだ数 a_n の中から単調に増加する部分列または単調に減少する部分列を選べることが分かる．すると定理1よりこの部分列は収束する．その極限値を α とするとコーシー列 $\{a_n\}$ は α に収束することが分かる．これが定理3の証明のあらすじである．

ところで他方，上に有界な単調増加数列 $\{b_n\}$ はコーシー列である．このことは次のようにして示すことができる．もし，コーシー列でなければ，ある正の数 ε_0 に対して上記の定義2の性質が成り立つようには m_1 を選ぶことはできないことになる．これは

$$|b_n - b_m| \geq \varepsilon_0$$

となる n, m が無数に存在することを意味する．そこで，$n_1 > n_0$ を

$$b_{n_1} - b_{n_0} \geq \varepsilon_0$$

となるように選ぶ．(数列は単調増加であるので絶対値は必要ないことに注意する．) 次に n_2 を $n_2 > n_1$ で

$$b_{n_2} - b_{n_1} \geq \varepsilon_0$$

が成り立つように選ぶ．このような n_2 がなければ $n \geq n_1$ のとき $b_n - b_{n_1} < \varepsilon_0$ となり，単調増加数列であるので $m \geq n_1$ のとき $b_m \geq b_{n_1}$ より，$n > m \geq n_1$ であれば $b_n - b_m \leq b_n - b_{n_1} < \varepsilon_0$ となり，ε_0 に対して定義2の性質が成り立つことになり，仮定に反するからである．

次に n_3 を $n_3 > n_2$ かつ

$$b_{n_3} - b_{n_2} \geq \varepsilon_0$$

と選ぶ．以下，同様にして $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$ と増大する整数の列を不等式

$$b_{n_k} - b_{n_{k-1}} \geq \varepsilon_0$$

が成り立つように選ぶことができる．すると

$$b_{n_k} \geq b_{n_0} + k\varepsilon_0, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

が成り立ち，k がどんどん大きくなるとき，$b_{n_0} + k\varepsilon_0$ もどんどん大きくなる[2]．したがって $\{b_n\}$ は上に有界でないことになるが，これは数列が上に有界という仮定に反する．したがって単調増加有界数列はコーシー列である．これより，逆に定理 3 から定理 1 を証明できることが分かった．定理 1 と定理 3 は内容は違うが，じつは実数の基本的な性質としては同値なことを主張している[3]．

実数の持つこれらの大切な性質については，たとえば杉浦光夫著『解析学 I』(東京大学出版会) に詳しく論じられている．また，実数論の創始者の一人であるデデキントの著書『数について』(岩波文庫) も優れた読み物である．

この節の最後に，フーリエ級数 (Fourier) の節で必要となる次の事実を証明しておこう．

補題 1　数列 $\{a_n\}$ が α に収束すれば平均値をとってできる数列

$$s_0 = a_0, s_1 = \frac{a_0 + a_1}{2}, s_2 = \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}, \cdots, s_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k, \cdots$$

も α に収束する．

証明は次のようにする．数列 $\{a_n\}$ が α に収束するので任意に正の数 ε を与えると $n \geq n_0$ であれば

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

が成り立つように n_0 を見出すことができる．すると

$$\begin{aligned} |s_n - \alpha| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| \\ &= \left| \frac{(a_1 - \alpha) + (a_2 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \right| \end{aligned}$$

[2] 正の数 a に対して正整数 n を大きくとれば na も大きくなって行く．これはアルキメデス (Archimedes) の公理とよばれ，実数の持つ大切な性質の一つである．

[3] 正確にはアルキメデスの公理と定理 3 から定理 1 が成り立つことが証明されたことになる．

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_n-\alpha|}{n} \\
&= \frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_{n_0-1}-\alpha|}{n} \\
&\quad + \frac{|a_{n_0}-\alpha|+|a_{n_0+1}-\alpha|+\cdots+|a_n-\alpha|}{n} \\
&< \frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_{n_0-1}-\alpha|}{n} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{2n}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，最後の不等式を得るために上の評価式 (8) を使った．さて，この不等式の最後の部分の第 1 項は，n_0 が固定されているので n を大きくすると小さくなる．すなわち，最初に与えた ε に対して $n \geq n_1$ であれば

$$\frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_{n_0-1}-\alpha|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように n_1 を見出すことができる．$n_1 \geq n_0$ としてもよいので，上の評価式から $n \geq n_1$ のとき

$$|s_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{2n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

を得る．すなわち，任意の ε に対して $n \geq n_1$ であれば

$$|s_n-\alpha| < \varepsilon$$

が成り立つように n_1 を見出すことができる．したがって $\{s_n\}$ は α に収束することが分かる．

この結果は通常の直観的な収束の定義からは導くことはできない．エプシロン・デルタ論法が大切であることを示す結果である．

§2　ベキ級数とその収束

最初に無限級数 (無限和)

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^{n+1}+\cdots \tag{9}$$

を考えよう．この級数が $x=x_0$ で意味を持つ (すなわち和を持つ) ということはどのようなことであろうか．そのために，有限和

$$A_n(x_0) = 1 + x_0 + x_0^2 + x_0^3 + \cdots + x_0^{n-1} + x_0^n$$

をとり，数列 $\{A_n(x_0)\}$ を考える．数列 $\{A_n(x_0)\}$ が α_0 に収束するとき無限級数 (9) は $x = x_0$ で収束して，その和は α_0 であるといい

$$1 + x_0 + x_0^2 + x_0^3 + \cdots + x_0^n + x_0^{n+1} + \cdots = \alpha_0$$

と記す．

$$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$$

であることに注意すれば

$$A_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n$$

とおけば

$$A_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1 \\ n+1, & x = 1 \end{cases}$$

となる．$|x| < 1$ であれば $\lim_{x\to\infty} x^n = 0$ であるので

$$\lim_{x\to\infty} A_n(x) = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)$$

であることが分かる．一方 $|x| > 1$ のときは $\lim_{x\to\infty} x^n$ は存在しないので (9) は和を持たない．また，$x = 1$ では $A_n(1) = n + 1$ となり収束しない．また $x = -1$ であれば

$$A_n(-1) = \begin{cases} 0, & n：奇数 \\ -1, & n：偶数 \end{cases}$$

であるので級数は $x = -1$ でも収束しない．以上の議論は x が複素数のときも適用することができる．

以下のベキ級数の議論は複素数で考えた方が自然であるが，本書「ガンマ関数入門」では実数の範囲でしか考えていないので，ここでも実数に限って議論しておく．複素数の場合の議論は本シリーズ『複素数の世界』を参照されたい．

さて，一般に

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

の形の無限和を**ベキ級数**という．このベキ級数を和の記号 $\sum$ を使って

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_jx^j \tag{10}$$

と記す．0 から n までの和

$$\sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

をこのベキ級数の n 次の項までの部分和という．

実数 x_0 が与えられたとき，

$$A_n(x_0) = \sum_{j=0}^{n} a_jx_0^j$$

とおくと数列 $\{A_n(x_0)\}$ ができる．この数列が，n が大きくなるときにある数 α_0 に収束するとき，ベキ級数 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_jx^j$ は $x = x_0$ で収束しその値は α_0 であるといい，

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_jx_0^j = \alpha_0$$

と記す．

ところでベキ級数 (10) が $x = x_0$ で収束すればすべての n に対して

$$|a_nx_0^n| < M$$

となるように正の数 M を取ることができる．これは次のようにして示すことができる．$x = x_0$ で収束することは $\{A_n(x_0)\}$ がコーシー列であることを意味する (定理 3)．したがって正の数 ε に対して $n \geq n_0$ であれば

$$\left|\sum_{j=n}^{n+m} a_jx_0^j\right| = |A_{n+m}(x_0) - A_n(x_0)| < \varepsilon$$

が任意の正整数 m に対して成立するように n_0 を見出すことができる．特に

$m=1$ の場合を考えれば $n \geq n_0$ のとき

$$|a_n x_0^n| < \varepsilon$$

が成り立つ．M として ε, $|a_0|$, $|a_1 x_0|$, $|a_2 x_0^2|, \cdots, |a_{n_0} x_0^{n_0}|$ より大きな正数をとればよい．このことは n が大きくなるとき $|a_n x^n|$ が小さくならなければベキ級数は x では収束しないことを意味する．(もちろん，$a_n x^n$ が n が大きくなるとき小さくなるからといって，ベキ級数が収束するとは限らない．)

さて，ベキ級数の収束に関して重要な概念として**絶対収束**がある．ベキ級数 (10) に対して各項の絶対値を取ってできるベキ級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j||x|^j$$

が $x=b$ で収束するとき，すなわち

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j||b|^j$$

が収束するときベキ級数 (10) は $x=b$ で絶対収束するという．この部分和は単調増加数列になるので，前節で述べたことから明らかなように，$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j||b|^j$ は収束するか無限大に発散するかのいずれかである．

級数 (10) が $x=b$ で収束するが絶対収束しないとき**条件収束**するという．たとえば無限級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} + \cdots \tag{11}$$

は収束するが，無限級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

は発散する．したがってベキ級数

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

は $x=-1$ で条件収束する．

再びコーシー列の応用として無限級数 (11) が収束することを示しておこう．

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}$$

とおく．$\dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{k+1}$ を使うことによって

$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots + (-1)^{s-1} \frac{1}{n+s}$$

を証明することができる．したがって，この不等式より

$$|a_{n+s} - a_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{s-1} \frac{1}{n+s} \right| < \frac{1}{n+1}$$

が成り立つことが分かる．そこで，正の数 ε に対して

$$\frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

が成り立つように n_0 を選ぶと $m, n \leq n_0$ のとき

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

が成り立つことが分かる．($m > n$ のとき $s = m - n$ とおいて上の不等式を使えばよい．) このことより，$\{a_n\}$ はコーシー列となり無限級数 (11) は収束することが証明できたことになる．

ところでベキ級数 (10) が $x = x_0$ で絶対収束すれば $x = x_0$ で収束する．これは言葉の遊びではない．絶対収束は

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j x_0^j| \tag{12}$$

の収束を意味し，このことが

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x_0^j \tag{13}$$

の収束を保証することを証明する必要がある．このことはコーシー列の考えを使えば証明できる．すなわち，無限級数 (12) が収束するためには部分和

$$B_n(|x_0|) = \sum_{j=0}^{n} |a_j x_0^j|$$

のなす数列 $\{B_n(|x_0|)\}$ がコーシー列であることが必要十分条件である．$\{B_n(|x_0|)\}$ がコーシー列であることは，任意の正の数 ε に対して $n \geq n_0$ であれば

$$|B_{n+m}(|x_0|) - B_n(|x_0|)| = \sum_{j=n}^{n+m} |a_j x_0^j| < \varepsilon$$

が任意の正整数 m に関して成り立つように n_0 を見出すことができることを意味する．一方

$$\left|\sum_{j=n}^{n+m} a_j x_0^j\right| \leq \sum_{j=n}^{n+m} |a_j x_0^j|$$

が成り立つことから $\{B_n(|x_0|)\}$ がコーシー列であれば $\{A_n(x_0)\}$ もコーシー列であることが分かり，無限級数 (13) は収束することが分かる．このように，ベキ級数の収束は実数の持つ深い性質の現れであることが分かる．

さてベキ級数の収束に関しては次の補題が基本的である．

補題 2　2 つのベキ級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$$

に関してある番号 n_0 以上の j に対してつねに

$$|a_j| \leq |b_j|$$

が成り立ち，かつベキ級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$$

が $x = x_0$ で絶対収束すれば，ベキ級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

も $x = x_0$ で絶対収束する．

この補題の証明にもコーシー列の考えを使う．ベキ級数 $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ が $x = x_0$ で絶対収束するので，任意に ε を与えると，$n \geq n_1$ であれば

$$\sum_{k=n}^{n+m} |b_k x_0|^k < \varepsilon$$

がすべての m に対して成り立つように n_1 を選ぶことができる．さらに，この n_1 は補題の n_0 より大きくとることができる．すると，$n \geq n_1$ であれば

$$\sum_{k=n}^{n+m} |a_k x_0|^k \leq \sum_{k=n}^{n+m} |b_k x_0|^k < \varepsilon$$

が成り立ち，ベキ級数の部分和からできる数列 $\left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_k x_0|^k \right\}$ がコーシー列となり，したがって級数は $x = x_0$ で絶対収束する．

この補題を使えば次の重要な定理を証明することができる．

定理 4　ベキ級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

が $x = x_0$ で収束すれば $|x| < |x_0|$ であるすべての x で絶対収束する．

ベキ級数は $x = x_0$ で収束するので，すべての正整数 n に対して $|a_n x_0^n|$ は上に有界，すなわち

$$|a_n x_0^n| < M$$

を満足する正数 M が存在する．したがって

$$|a_j x^j| = \left| a_j x_0^n \cdot \frac{x^j}{x_0^j} \right| < M \left| \frac{x_1}{x_0} \right|^j$$

が成立する．ベキ級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0} \right)^j$$

は $|x| < |x_0|$ の各値で絶対収束するので，上の補題よりベキ級数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ は $|x| < |x_0|$ の各点 x で絶対収束することが分かる．これより，ベキ級数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ に関しては

(1) すべての x でベキ級数は収束する．

(2) $|x| < r$ を満足するすべての x に対してベキ級数は収束し，$|x| > r$ を満足するすべての x に対してベキ級数は発散するような正の数 r が存在する．

(3) $x = 0$ 以外のすべての x に対してベキ級数は発散する．

この事実は，x が複素数の場合もそのまま成り立つ．

定義 3　上記の (1) の場合，ベキ級数の収束半径は無限大，(2) の場合は収束半径は r, (3) の場合は収束半径は 0 であるという．

次の結果は収束半径を求めるのに役立つことが多い．

定理 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r$$

であればベキ級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

の収束半径は r である．ただし $r = \infty$ のときは収束半径は無限大である．

この定理の証明も基本的には上の補題の応用である．もし

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = r$$

が有限の値であれば，小さな正の数 ε に対して $n \geq n_0$ であれば

$$\left| \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - r \right| < \varepsilon$$

が成り立つように n_0 を見出すことができる．このとき $n \geq n_0$ であれば

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > r - \varepsilon$$

が成り立つ．すると $n > n_0$ のとき

$$\frac{|a_{n_0}|}{|a_n|} = \frac{|a_{n_0}|}{|a_{n_0+1}|}\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0+2}|}\cdots\frac{|a_{n-2}|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} > (r-\varepsilon)^{n-n_0}$$

が成り立つので，

$$|a_n| < \frac{|a_{n_0}|}{(r-\varepsilon)^{n-n_0}}, \quad n > n_0$$

が成り立つ．したがって補題より $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k x^k$ は $|x| < r - \varepsilon$ の各点 x で絶対収束する．$|x| < r$ であれば $|x| < r - \varepsilon$ を満足するように ε を選ぶことができる．したがって $|x| < r$ の各点でベキ級数は絶対収束する．(上では $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k x^k$ を考えたが，最初の有限個の項 $\sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k$ は級数の収束には関係しないことに注意する．また $r = \infty$ のときは $r - \varepsilon$ のかわりに任意に正の数 M を選んで同様の議論をすればすべての x でベキ級数は絶対収束することが分かる．)

次に $|x| > r$ となる x を考える．このときは $|x| > r + \varepsilon_1$ となる $\varepsilon_1 > 0$ を見出すことができる．すると，上と同様にして $n \leq n_1$ であれば

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > r + \varepsilon$$

が成り立つように n_1 を見出すことができる．すると，上と同様の考察によって

$$|a_n| > \frac{|a_{n_1}|}{(r+\varepsilon_1)^{n-n_1}}, \quad n > n_1$$

が成り立つ．したがって

$$|a_n||x^n| > |a_{n_1}||x^{n-n_1}| \cdot \frac{|x|^{n-n_1}}{(r+\varepsilon_1)^{n-n_1}}, \quad n > n_1$$

が成り立ち，$|x| > r + \varepsilon_1$ であるので $\sum_{k=n_1}^{\infty} |a_k||x^k|$ は発散する．したがって級数の収束半径は r である．

たとえば本書第 3 章で登場する級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

の収束半径は 1 であることがこの定理から分かる．$|x| < 1$ のときこの級数は

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

に一致する．また $\sin x$ のテイラー展開

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

の収束半径は無限大であることもこの定理から分かる．一方，ベキ級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} k! x^k = x + 2x^2 + 3! x^3 + 4! x^4 + \cdots$$

の収束半径は 0 であり，このベキ級数は $x \neq 0$ では収束しない．

さて，次の定理は本書でもしばしば使われる重要な定理である．絶対収束が重要であることはこの定理が語っている．

定理 6　無限級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

絶対収束すれば，すなわち

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$$

が収束すれば，和の順序を変えても収束しその値は変わらない．

この定理は収束半径内で x のベキ級数に適用できることは明らかであろう．

この定理の証明もコーシー列の考え方を使う．無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ の和の順番を入れ替えてできる級数を $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ と記そう．$b_k = a_{j_k}$ と書ける．まずこの新しい無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ も絶対収束することを示そう．無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ は絶対収束するから，任意に正の数 ε を与えると $n \geq m_0$ であれば任意の正整数 m に対して

$$\sum_{k+n}^{n+m} |a_k| < \varepsilon$$

が成り立つような m_0 を見出すことができる．このとき，無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ の m_1 次以上の項には $a_l,\ l < m_0$ が現れないように m_1 も選ぶことができる．すなわち $k \geq m_1$ であれば $b_k = a_{j_k}$ のとき，$j_k \leq m_0$ であるように m_1 を選ぶ．すると，$n \geq m_1$ であればすべての正整数 m に対して

$$\sum_{k=n}^{n+m} |b_k| \leq \sum_{k=n}^{n+m} |a_{j_k}| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって級数 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ の部分和がなす数列はコーシー列になり，級数は収束することが分かる．つぎにどちらの級数の極限値も等しいことを示そう．

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha$$

とする．任意の正の数 ε に対して $n \geq n_0$ であれば

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つように n_0 を見出すことができる．さらに必要であれば n_0 を大きく取り直して $n \geq n_0$ であればすべての正整数 m に対して

$$\sum_{k=n}^{n+m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

が成り立つようにできる．

このとき，$a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}$ は $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ の n_1 番目の項までにすべて現れるように n_1 を選ぶ．すると $n \geq n_1$ のとき

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - \alpha\right| = \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - \alpha + \sum{}' a_l\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - \alpha\right| + \left|\sum{}' a_l\right|$$

と書くことができる．ここで，$\sum{}' a_l$ は $b_1, b_2, \cdots, b_n$ のうち $b_k = a_{j_k}$ と記したときに，$j_k > n_0$ であるものに渉る和である．するとこのような j_k のうち最大のものを $n_0 + m$ と記すと

$$\left|\sum{}' a_l\right| \leq \sum{}' |a_l| \leq \sum_{l=n_0+1}^{n_0+m} |a_l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つことが分かる．したがって

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - \alpha\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k - \alpha\right| + \left|\sum{}' a_l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

であることが分かり，無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ も α に収束することが分かる．

以上の証明では，絶対収束は評価 (14) で使われたにすぎない．これは何でもないことのように思われるかもしれないが，評価 (14) は条件収束のときは成り立たない．じつは，条件収束の場合は和の順序を変えると収束しないことも，また極限値が異なることもあることに注意する．じつはさらに強いことがいえる．

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \tag{15}$$

のように，正の数と負の数が交互に現れる無限級数を交代級数という．このとき次の不思議な事実を証明することができる．

定理 7　交代級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

が条件収束すれば和の順序を変えることによってどのような値にも収束させ

ることができる．

このことを上の例 (15) で見ておこう．数 M を 1 つ選ぶ．簡単のため $M > 0$ の場合を考えよう．

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$$

は無限大に発散するので

$$\sum_{k=1}^{m_1-1} \frac{1}{2k-1} \leq M < \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{2k-1}$$

が成り立つように m_1 を見出すことができる．これは交代級数 (15) の正の項を最初から $m_1 - 1$ 個足すと M 以下であるが m_1 個足すと M より真に大きくなることを意味する．次に負の項を足して

$$\sum_{k=1}^{m_1+1} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n_1+1} \frac{1}{2k} \leq M < \sum_{k=1}^{m_1+1} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2k}$$

が成り立つように n_1 を見出すことができる．次に残りの正の項を考え

$$\sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2k} + \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} \frac{1}{2k-1} \leq M$$
$$< \sum_{k=1}^{m_1} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2k} + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \frac{1}{2k-1}$$

が成り立つように m_2 を見出すことができる．次に負の項を考え，以下交互に正の項と負の項を足し合わせることによって M を左右から不等式ではさむことができる．左辺と右辺の差は $\dfrac{1}{n}$ の形であり，以上の操作を続けると n はどんどん大きくなっていくので，左辺と右辺の差はどんどん小さくなっていく．したがってこの和は M に近づくことが分かる．

一般の交代級数のときも同様の操作をすることによって定理が証明できる．

以上の議論から，コーシー列の考え方がいかに威力を発揮するかおぼろげながら納得されたことと思う．それでも，コーシー列の考え方が今ひとつ納得できないのは，コーシー列は収束することは分かっても，どの値に収束するかは何も語ってくれない点にある．これは私たちの認識の根源にかかわる

問題でもある．数学ではあるものの存在を示すことと，それを具体的に示す方法とは通常は異なっている場合が多い．上で交代級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}+\cdots$$

が収束することをコーシー列の考え方を使って示した．その極限値が $\log 2$ であることを示すには別の方法が必要になってくる．こうしたことが，実数論に違和感を持つ大きな理由であるが，具体的な極限値が分からなくても収束するかどうかが分かることに意味があることは多くの読者も同意されるであろう．

§3　一様収束

関数列 $\{f_n(x)\}$ が与えられたとき，数列 $\{f_n(a)\}$ が収束するとき関数列 $\{f_n(x)\}$ は $x=a$ で収束するという．しかし，収束の仕方は x の値によって変わってくる．この辺の事情を区間 $[0,1]$ 上での関数列

$$f_n(x)=x^n,\quad n=1,2,3,\cdots$$

で調べてみよう．$0\leq x<1$ であれば

$$\lim_{n\to\infty}x^n=0$$

である．また $f_n(1)=1$ であるので，関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

と定義すると

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)$$

であることが分かる．ではこのとき，数列の収束にならった次のように関数列の収束の定義を満足するであろうか．

定義 4　区間 I で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ が与えられたとき，任意の正

数 ε に対して $n \geq n_0$ であれば

$$|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

が区間 I のすべての点 x で成り立つように n_0 を選ぶことができるとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ は区間 I で**一様収束する**という．

この定義の性質を関数列が持てば，確かに関数列 $\{f_n(x)\}$ は $g(x)$ に収束するということができる．ただし，わざわざ一様収束という用語を使ったのには理由がある．上の関数列 $\{f_n(x) = x^n\}$ に関してこのことが成り立つかどうか確かめてみよう．

ε としてたとえば 10^{-5} をとってみよう．$0 < x < 1$ に対して

$$x^n < 10^{-5}$$

が成り立つための条件は両辺の常用対数をとって

$$n \log_{10} x < -5$$

と表現できる．$0 < x < 1$ では $\log_{10} x < 0$ であることに注意すれば，この条件は

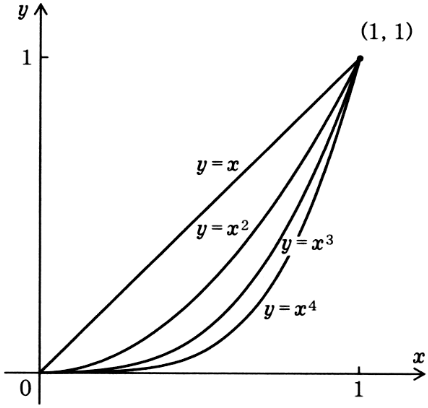
$$n > \frac{-5}{\log_{10} x}$$

と書き直すことができる．したがって $\varepsilon = 10^{-5}$ のとき n_0 は

$$n_0 \geq \frac{-5}{\log_{10} x}$$

を満足すればよい．ところがこの不等式の右辺の方は x が 1 に近づくにつれてどんどん大きくなってしまう．$x \to 1$ のとき $\log_{10} x \to 0$ となるからである．したがって上の定義 4 の性質は成り立たないことが分かる．

このことは x の値によって $f_n(x) = x^n$ の 0 への近づき方 (近づく速さ) が変わってくることを意味する，x が 1 に近いほどゆっくりと 0 に近づいていくことが分かる．その結果 $x = 1$ で極限関数 $g(x)$ は不連続になっている．連続関数列の極限はこのように連続関数とは限らない．



上の定義 4 で関数列 $\{f_n(x)\}$ は $g(x)$ に一様収束するといったのは，収束の仕方が x によらないことを意味している．このときは次の定理が成り立つ．

定理 8　連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I で関数 $g(x)$ に一様収束すれば $g(x)$ は区間 I で連続である．

このことは次のようにして示される．

関数 $g(x)$ が点 $x = x_0$ で連続であることは $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ が成り立つことである．これは，正確には ε と δ を使って次のように定義する．(エプシロン・デルタ論法の名称の起こりはこの定義にある．)

定義 5　任意の正の数 ε に対して $|x - x_0| < \delta$ であれば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ が成り立つように $\delta > 0$ を見出すことができるとき，$f(x)$ は点 x_0 で連続であるという．

さて，一様収束の定義から ε に対して $n \geq n_0$ であれば $|f_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ が成り立つように n_1 を見出すことができる．そこで $n \geq n_1$ となる正整数 n を 1 つ選ぶ．すると $f_n(x)$ は連続関数であるので $|x - x_0| < \delta$ であれば $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ が成り立つように δ を見出すことができる．したがって，これより $|x - x_0| < \delta$ のとき

$$
\begin{aligned}
|g(x) - g(x_0)| &= |g(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - g(x_0)| \\
&\leq |f_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

となるので $g(x)$ は x_0 で連続である．この論法の要点は $n \leq n_1$ であれば

$$
|f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_n(x_0) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}
$$

が成り立つことにある．一様収束でなかったら，収束の仕方が x によって変わってきて x に無関係に同じ n_1 を見つけることができないことを上の例で示した．これが，上の例では $x = 1$ で極限関数 $g(x)$ が不連続になる理由である．

ではどのような場合に関数列は一様収束するのであろうか．関数列でよく使われるのは関数を項とする無限級数

$$
\sum_{k=1}^{\infty} g_n(x)
$$

の場合である．この級数の収束は部分和

$$
G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_n(x)
$$

からできる関数列 $\{G_n(x)\}$ の収束を意味し，一様収束もこの関数列の一様収束を意味する．関数の級数の一様収束に関しては次の定理はよく使われる．

定理 9　区間 I で定義された関数 $g_n(x)$ からなる無限級数

$$
\sum_{k=1}^{\infty} g_n(x) \tag{16}
$$

に対して区間 I で

$$
|g_n(x)| < a_n
$$

が成り立ち，かつ無限級数

$$
\sum_{k=1}^{\infty} a_k
$$

が収束すれば級数 (16) は区間 I で極限関数に一様収束する．したがって，特に $f_n(x)$ が区間 I で連続であれば極限関数も区間 I で連続である．

証明のあらすじは次の通りである．ここでもコーシー列の考えが威力を発揮する．数列 $\{a_n\}$ が収束することから任意に正の数 ε を与えると $n \geq n_0$ であれば $\sum_{k=n}^{n+m} a_k < \varepsilon$ がすべての正数 $m \geq 0$ に対してつねに成り立つように n_0 を見出すことができる．すると区間 I のすべての点 x で

$$\left|\sum_{k=m}^{n} g_k(x)\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |g_k(x)| < \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon$$

が成り立ち $G_n(x)$ はコーシー列になる．したがって級数はある関数 $G(x)$ に収束する．この収束が一様であることは関数列 $\{G_n(x)\}$ がコーシー列になることが x によらないことからほとんど明らかであろう．上で与えた一様収束の定義では関数列と極限関数との関係に基づいていたので，念のため証明をしておこう．まず

$$G_n(x) - G(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x)$$

とかけることに注意する．正の数 ε が与えられたとき $n \geq n_1$ であれば

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} G_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が任意の正整数 m に対して成り立つように n_1 を見出すことができることは上と同様にして示すことができる．すると $m \to \infty$ を考えることによって

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} G_n(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つことが分かる．極限をとったので等号が必要になるかもしれないことに注意しよう．これより $n \geq n_1$ であれば

$$|G_n(x) - G(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

となり，一様収束であることが分かる．以上の証明はベキ級数の場合の証明の一般化になっているとも考えられる．

§4　無限積

積

$$p_1 p_2 \cdots p_n p_{n+1} \cdots$$

が無限に続いたものを**無限積**といい

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k$$

とも記す．これは最初の m 個の積

$$Q_m = \prod_{k=1}^{m} p_k = p_1 p_2 \cdots p_{k-1} p_k$$

からできる数列 $\{p_m\}$ が収束するとき，無限積は収束するといい，極限値が Q のとき

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = Q$$

と記す．実際に無限積が登場するのは p_k が単なる数値ではなく関数である場合が多いので，無限積の収束をもう少し精密に定義した方がよい．

定義 6　数列 $\{p_n\}$ のうちに 0 は有限個 $p_{i_1}, p_{i_2} \cdots p_{i_s}$ しかなく，かつこれらの 0 を除外した部分積

$$Q'_m = \prod_{k=1, k \neq i_j} p_k$$

が $m \to \infty$ のとき **0** でない有限の値に収束するとき，無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 p_2 \cdots p_n p_{n+1} \cdots \tag{17}$$

は収束するといい，

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = \begin{cases} Q', & p_k \neq 0,\, k = 1, 2, 3, \cdots \text{ のとき} \\ 0, & \{p_k\} \text{ のうち有限個の } p_i \text{ が } 0 \text{ であるとき} \end{cases}$$

と定義する．

このように定義すれば，たとえば本書で登場する無限積

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

を扱うことができる．この場合の無限積の収束は x に実数値を代入した無限積の収束を考える．

さて無限積 (17) が収束すれば

$$\lim_{m\to\infty} Q'_m = Q' \neq 0$$

であるので，m が十分大きければ

$$p_{m+1} = \frac{Q'_{m+1}}{Q'_m}$$

が成り立ち，$m \to \infty$ を考えることによって，無限積が収束すれば

$$\lim_{m\to\infty} p_m = 1$$

であることが分かる．そこで，通常は

$$p_k = 1 + a_k$$

と書いて，無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$$

を考えることが多い．無限積が収束すれば

$$\lim_{m\to\infty} a_m = 0$$

である．

このとき，次の定理が基本的である．

定理 10　無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k) \tag{18}$$

が収束するための必要十分条件は無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+a_n) \tag{19}$$

が収束することである

この定理は a_n が複素数の場合でも，対数 $\log(1+a_n)$ を対数関数の主値にとれば正しいことが知られている．(このことに関してはたとえば，本シリーズ『複素数の世界』p.176–177 を参照のこと．)　この定理の証明のあらすじは次の通りである．

簡単のため，すべての m に対して $1+a_m \neq 0$ と仮定する．このとき

$$Q_m = \prod_{k=1}^{m}(1+a_k)$$

が $m \to \infty$ のとき $Q \neq 0$ に収束すれば

$$\log Q_m = \sum_{k=1}^{m}\log(1+a_k)$$

は $\log Q$ に収束する．したがって

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+a_k) = \log Q$$

である．一方，無限和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+a_k)$$

が収束し，その値が L であるとする．これは部分和

$$L_m = \sum_{k=1}^{m}\log(1+a_k)$$

が $m \to \infty$ のとき L に収束することを意味する．すると

$$\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)=e^{L_m}$$

は $m\to\infty$ のとき e^L に収束する．$e^L\neq 0$ であるので無限積は確かに $Q=e^L$ に収束する．

さて，無限積 (17) は対応する対数の無限和 (19) が絶対収束するとき，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\log(1+a_k)|$$

絶対収束するという．積の各項の絶対値を取ることではないことに注意する．ところで

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

であるので，無限積が絶対収束すれば $1+a_m$ は m が大きくなれば 1 に近づき，したがって正の数 ε に対して $n\geq n_0$ であれば

$$1-\varepsilon<\frac{|\log(1+a_n)|}{|a_n|}<1+\varepsilon$$

すなわち

$$(1-\varepsilon)|a_n|<|\log(1+a_n)|<(1+\varepsilon)|a_n|$$

が成り立つように n_0 を見つけることができる．したがって

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\log(1+a_k)|$$

の収束と

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|$$

の収束とは同値である，すなわちどちらか一方が収束すれば必ず他方も収束することが分かる．これより，次の有用な定理が証明されたことになる．

定理 11　無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$$

が絶対収束するための必要十分条件は無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_n|$$

が収束することである．

関数の無限積に関しては，関数の無限和と同様に一様収束の概念を定義することができる．

本書では第 2 章にワイエルシュトラスによるガンマ関数積表示の中で関数の無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}$$

が登場する．この場合は

$$a_k=\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}-1$$

となっている．

$$\log\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}=\frac{x}{k}-\log\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

であるので，この無限積の収束は

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k}-\log\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)$$

の収束と同値である．ここでは $x>0$ のときを考察する．まず $t>0$ のとき

$$t-\log(1+t)>0$$

に注意する．$f(t)=t-\log(1+t)$ とおくと $t>0$ で

$$f'(t)=1-\frac{1}{1+t}>0$$

かつ $f(0)=0$ に注意すればよい．さらに

$$\frac{t^2}{2} > t - \log(1+t)$$

が成り立つ．これを示すには

$$g(t) = \frac{t^2}{2} - (t - \log(1+t))$$

とおくと $t>0$ で

$$g'(t) = t - \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) = \frac{t^2}{1+t} > 0$$

が成り立つことと $g(0)=0$ に注意すればよい．これより

$$0 < \frac{x}{k} - \log\left(1+\frac{x}{k}\right) < \frac{x^2}{2k^2}$$

が成り立つことが分かる．したがって

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x}{k} - \log\left(1+\frac{x}{k}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{2k^2}$$

が成り立つが

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

が収束するので，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x}{k} - \log\left(1+\frac{x}{k}\right)\right|$$

も収束し，無限積は絶対収束することが分かる．しかも，$0 < x \leq M$ であれば

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x}{k} - \log\left(1+\frac{x}{k}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{M^2}{2k^2}$$

であるので，収束は $0 < x \leq M$ で一様収束することが分かる．これより無限積は $x > 0$ で連続な関数を定義することが分かる．この議論は本書第 3 章

で展開される．

§5　広義積分

関数 $f(x)$ が点 b で定義されていなかったり不連続であれば，他では連続であっても積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

はそのままでは定義できない．しかし，小さな正の数 ε に対して

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

は定義できる．このとき，もし

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

存在すれば，この極限値を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と記し，**広義積分**という．ただし，$\varepsilon \to 0+$ は，ε が正の値のままで 0 に近づくことを意味する．一方，この極限値が存在しなければ積分は定義できない．たとえば関数

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

は $x=1$ では定義されていない．

$$\int_0^{1-\varepsilon} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

となり，$\varepsilon \to 0+$ のときこの積分の値は発散する．したがって，この場合積分

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

は定義できない．一方

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

の場合は

$$\int_0^{1-\varepsilon} g(x)\,dx = [\arcsin x]_0^{1-\varepsilon} = a(\varepsilon)$$

と書ける．ここで $a(\varepsilon)$ は

$$\sin a(\varepsilon) = 1-\varepsilon, \quad 0 < a(\varepsilon) < \frac{\pi}{2}$$

となる数であり，

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} a(\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

であるので

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．

同様にして $f(x)$ が $x = a$ で定義されていないが

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

が存在するとき，この極限値を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と記す．これも広義積分である．

$\log(2\sin \pi t) \cos 2n\pi t$ のように $t = 0$, $t = 1$ で定義されていないときは広義積分

$$\int_0^1 \log(2\sin \pi t) \cos 2n\pi t\,dt$$

が定義されるかどうかは

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0+ \\ \varepsilon_2 \to 0+}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \log(2\sin \pi t)\cos 2n\pi t\, dt$$

を考える必要がある．このとき ε_1 と ε_2 とは独立に動かして極限をとる．$n \geq 1$ であれば部分積分によって

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \log(2\sin \pi t)\cos 2n\pi t\, dt \\
&\quad = \left[\frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi}\log(2\sin \pi t)\right]_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} - \frac{1}{2n\pi}\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{2\pi\cos \pi t}{2\sin \pi t}\sin 2n\pi t\, dt \\
&\quad = \frac{\sin 2n\pi(1-\varepsilon_2)}{2n\pi}\log 2\sin \pi(1-\varepsilon_2) \\
&\qquad -\frac{\sin 2n\pi\varepsilon_1}{2n\pi}\log 2\sin \pi\varepsilon_1 - \frac{1}{n}\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{\cos \pi t}{2\sin \pi t}\sin 2n\pi t\, dt
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\lim_{x\to 0+} x\log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

に注意すると，最初の広義積分の計算は

$$-\frac{1}{n}\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{\cos \pi t}{2\sin \pi t}\sin 2n\pi t\, dt$$

の計算に帰着できることになる．ところで，

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sin 2n\pi t}{2\sin \pi t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin 2n\pi t}{2n\pi t}\frac{2n\pi t}{2\sin \pi t} = 2n$$

であり，$t \to 1-$(すなわち $t < 1$ で t が 1 に近づく) ときは $t = 1 - s$ と置き換えて同様に議論ができ，$\sin 2n\pi t / 2\sin \pi t$ は $t = 0$, $t = 1$ でも連続と考えることができる．したがって，最初の広義積分は存在して

$$-\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\cos \pi t}{2\sin \pi t}\sin 2n\pi t\, dt$$

と一致することが分かる．本書の最後の章でこの積分値を使う必要があるのでここで計算しておこう．

$$\sin 2n\pi t = \sin(2n-1)\pi t \cos \pi t + \cos(2n-1)\pi t \sin \pi t$$

を使うと

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\cos \pi t}{2\sin \pi t} \sin 2n\pi t \, dt \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\cos^2 \pi t}{2\sin \pi t} \sin(2n-1)\pi t \, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos \pi t \cos(2n-1)\pi t \, dt
\end{aligned}$$

となるが右辺の第 2 項は

$$\cos \pi t \cos(2n-1)\pi t = \frac{1}{2}\left\{\cos 2n\pi t + \cos(2n-2)\pi t\right\}$$

より $n \geq 2$ のとき 0 である．そこで，

$$I_{2n} = \int_0^1 \frac{\cos \pi t}{2\sin \pi t} \sin 2n\pi t \, dt$$

とおくと，$n \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \int_0^1 \frac{\cos^2 \pi t}{2\sin \pi t} \sin(2n-1)\pi t \, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1-\sin^2 \pi t}{2\sin \pi t} \sin(2n-1)\pi t \, dt \\
&= \int_0^1 \frac{\sin(2n-1)\pi t}{2\sin \pi t} \, dt - \int_0^1 \sin \pi t \sin(2n-1)\pi t \, dt
\end{aligned}$$

と変形できる．この最後の式の第 2 項は

$$\sin \pi t \sin(2n-1)\pi t = -\frac{1}{2}\{\cos 2n\pi t - \cos(2n-2)\pi t\}$$

より $n \geq 2$ のとき 0 である．一方

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\sin(2n-1)\pi t}{2\sin \pi t} \, dt \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\cos \pi t}{2\sin \pi t} \sin(2n-2)\pi t \, dt + \int_0^1 \cos(2n-2)\pi t \, dt
\end{aligned}$$

と変形でき，右辺の第 2 項は 0 である．したがって $n \geq 2$ のとき

$$I_{2n} = I_{2n-2}$$

が示された．さらに

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \frac{\cos \pi t}{2 \sin \pi t} \sin 2\pi t \, dt \\
&= \int_0^1 \frac{\cos \pi t}{2 \sin \pi t} (2 \sin \pi t \cos \pi t) \, dt \\
&= \int_0^1 \cos^2 \pi t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos 2\pi t) \, dt \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

であることが分かる．以上によって広義積分

$$\int_0^1 \log(2 \sin \pi t) \cos 2n\pi t \, dt = -\frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{20}$$

が求められた．一方，$\sin \pi x$ は区間 $[0, 1]$ で $x = 1/2$ を中心として対称であるので

$$\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \log(2 \sin \pi t) \, dt = \int_{\varepsilon_1}^{\frac{1}{2}} \log(2 \sin \pi t) \, dt - \int_{\varepsilon_2}^{\frac{1}{2}} \log(2 \sin \pi t) \, dt$$

が成り立つ．したがって広義積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log(2 \sin \pi t) \, dt$$

が存在することがいえれば

$$\int_0^1 \log(2 \sin \pi t) \, dt = 0 \tag{21}$$

が成り立つことが分かる．上と同様にして

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \log(2 \sin \pi t) \, dt &= [t \log(2 \sin \pi t)]_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{t\pi \cos \pi t}{\sin \pi t} \, dt \\
&= \frac{1}{2} \log 2 - \varepsilon \log(2 \sin \pi \varepsilon) - \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{t\pi \cos \pi t}{\sin \pi t} \, dt
\end{aligned}$$

が成り立つ．上で示したことと同様に

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon \log(2 \sin \pi\varepsilon) = 0$$

であり，$\dfrac{t}{\sin \pi t}$ は $t \to 0+$ のとき有限の値に近づくので

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t\pi \cos \pi t}{\sin \pi t} \, dt$$

は通常の積分と考えてよい．したがって広義積分は存在する．

同様にして

$$\int_0^1 \log(2 \sin \pi t) \sin 2n\pi t \, dt = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{22}$$

であることを示すことができる．

次に

$$\lim_{M \to \infty} \int_a^M f(x) \, dx$$

が存在するときこの極限値を

$$\int_a^\infty f(x) \, dx$$

と記す．たとえば

$$\int_0^M e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_0^M = 1 - e^{-M}$$

であり，

$$\lim_{M \to \infty} e^{-M} = 0$$

であるので，広義積分が定義でき

$$\int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1$$

であることが分かる．

この結果はさらに

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = n! \tag{23}$$

と拡張することができる．この結果は本書でガンマ関数の理論を展開するための基礎となる事実である．このことを n に関する帰納法で示そう．$n = 0$ の場合が上で示したことである．n まで広義積分が存在して (23) が成立したと仮定しよう．

部分積分によって

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-x} x^{n+1} \, dx &= -\left[e^{-x} x^{n+1}\right]_0^M + (n+1) \int_0^M e^{-x} x^n \, dx \\ &= (n+1) \int_0^M e^{-x} x^{n-1} \, dx - e^{-M} M^n\end{aligned}$$

を得る．

$$\lim_{M \to \infty} e^{-M} M^n = \lim_{M \to \infty} \frac{M^n}{e^M}$$

であるので，n のとき広義積分が存在するという仮定を使うと $n+1$ の場合も広義積分が存在することが分かり

$$\int_0^M e^{-x} x^{n+1} \, dx = (n+1) \int_0^M e^{-x} x^{n-1} \, dx$$

が成り立ち，(23) から

$$\int_0^M e^{-x} x^{n+1} \, dx = (n+1)!$$

が成り立つことが分かる．

同様に

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^b f(x) \, dx$$

が存在するとき，この極限値を

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

と記す．さらに

$$\lim_{M,N\to\infty}\int_{-M}^{N} f(x)\,dx$$

が存在するとき (M, N は独立に無限大に動かす)，この極限値を

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

と記す．

広義積分が定義できるためにはこのように積分値の極限をとる必要があるが,『上に有界な単調増加数列は収束する』という実数の基本的な性質 (定理 1) を使うことができる場合がある．ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は本書では広義積分

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

で定義する．0 も ∞ の両者とも広義積分である．このことは本書第 2 章で詳しく議論されている．

§6　フーリエ級数

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2n\pi x+b_n\sin 2n\pi x) \tag{24}$$

の形の無限級数 (無限和) を**フーリエ級数**という．オイラーの関係式 (オイラーの公式ともいう)

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を使ってフーリエ級数を

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x} \tag{25}$$

の形に表示することも多い．(i は虚数単位である．オイラーの関係式については本シリーズ『複素数の世界』第 4 章 §1 を参照のこと）ここでは本書「ガンマ関数入門」でのアルチンの記法にならって (25) の表示を主として使うが，表示が簡単になる場合は三角関数を使った表示式 (24) を使う．

(24) と (25) の係数の間の関係は

$$\cos 2\pi nx = \frac{e^{2\pi inx} + e^{-2\pi inx}}{2}, \quad \sin 2\pi nx = \frac{e^{2\pi inx} - e^{-2\pi inx}}{2i}$$

を使うと

$$c_\nu = \begin{cases} a_0, & \nu = 0, \\ \dfrac{a_\nu}{2} - \dfrac{b_\nu}{2}i, & \nu > 0, \\ \dfrac{a_{-\nu}}{2} + \dfrac{b_{-\nu}}{2}i, & \nu < 0 \end{cases}$$

で与えられることが分かる．これを逆に解けば

$$a_0 = c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n},\ n > 0, \quad b_n = (c_n - c_{-n})i,\ n > 0 \qquad (26)$$

であることが分かる．

フーリエ級数 (25) が収束して関数 $f(x)$ を定義したとすると，積分 (複素関数の積分は実部と虚部の積分として定義する)

$$\int_0^1 e^{2\pi i\nu x}\,dx = \int_0^1 \cos 2\pi\nu x\,dx + i\int_0^1 \sin 2\pi\nu x\,dx = \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ 0, & \nu \neq 0 \end{cases}$$

を形式的に適用すると (無限和と積分の順序を交換してよいかどうかは明らかではないが)

$$c_\nu = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx$$

が出てくる．そこで閉区間 $[0, 1]$ で定義された関数 $f(x)$ に対して積分

$$c_\nu = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx$$

がすべての整数 ν に対して存在するとき，c_ν を $f(x)$ の**フーリエ係数**，フー

リエ級数

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

を $f(x)$ の**フーリエ級数**，または $f(x)$ の**フーリエ展開**といい

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

と記す．この右辺の無限和がどのような場合に収束して $f(x)$ に等しくなるか考察するのがフーリエ級数の基本的な問題である．

三角関数を使ったフーリエ級数の表示に対しては

$$\int_0^1 \cos 2\pi mx \sin 2\pi nx \, dx = 0$$
$$\int_0^1 \sin^2 2\pi nx \, dx = \frac{1}{2}, \quad n \neq 0$$
$$\int_0^1 \cos^2 2\pi nx \, dx = \frac{1}{2}, \quad n \neq 0$$

を使うことによって上と同様の考えで

$$a_0 = \int_0^1 f(x) \, dx$$
$$\frac{a_n}{2} = \int_0^1 f(x) \cos 2\pi nx \, dx$$
$$\frac{b_n}{2} = \int_0^1 f(x) \sin 2\pi nx \, dx$$

とおいて $f(x)$ のフーリエ級数

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi nx + b_n \cos 2\pi nx)$$

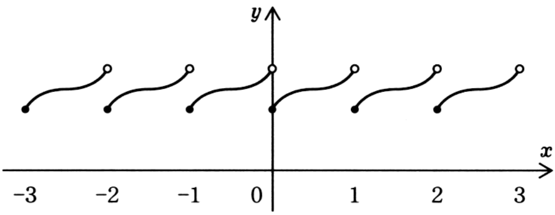
を得ることができる．

ところで $e^{2\pi ix}$ は周期が 1 の関数，すなわち $e^{2\pi i(x+1)} = e^{2\pi ix}$ が成り立つので閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f(x)$ のフーリエ級数が収束して $f(x)$ に等しければフーリエ級数は数直線上で定義された周期が 1 の関数 (すなわち

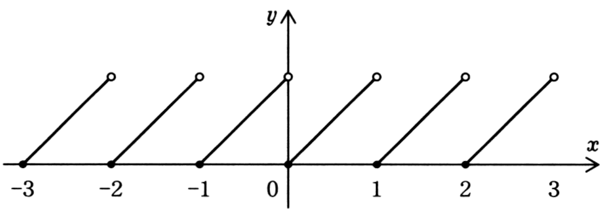
$f(x+1) = f(x)$ がすべての x で成り立つ関数) と考えることができる．これは閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = f(x-n), \quad n \leq x < n+1$$

と定義域を拡張してできる周期 1 の関数に他ならない．一般には $f(1) \neq f(0)$ であるので閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f(x)$ をこのように周期関数として実数全体で定義された関数 $\widetilde{f}(x)$ に拡張すると x が整数のところで不連続になるが，フーリエ係数が積分で定義されていることから，閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f(x)$ を考えることと，実数全体で定義された周期 1 の関数 $\widetilde{f}(x)$ を考えることはフーリエ級数の議論では実質的に同じである．フーリエ級数が収束するとき不連続点での値については下の定理 12 が答えてくれる．



いくつかの基本的な関数のフーリエ級数を考えてみよう．閉区間 $[0,1]$ で関数 $f(x) = x$ を考える．これは図のような周期関数を考えることと実質同じである．



部分積分によって $\nu \neq 0$ のとき

$$\int_0^1 xe^{-2\pi i\nu x}\,dx = \left[\frac{xe^{-2\pi i\nu x}}{-2\pi\nu i}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi\nu i}\int_0^1 e^{-2\pi i\nu x}\,dx = \frac{i}{2\pi\nu}$$

を得る．したがって $f(x)$ のフーリエ展開は

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=-\infty,\nu\neq 0}^{\infty}\frac{i}{2\pi\nu}e^{2\pi i\nu x}$$

となる．このフーリエ展開は三角関数を使った方が見やすい．上の係数の関係式を見れば三角関数を使えば区間 $[0,1]$ で

$$x\sim\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n\pi}$$

を得る．下の定理 12 からこのフーリエ級数は区間 $[0,1]$ で収束し，特に $0<x<1$ では極限値は x に等しいことが分かる．したがって，特に $x=\dfrac{1}{4}$ と置くと

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=\frac{1}{2}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi}$$

を得る．これより

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

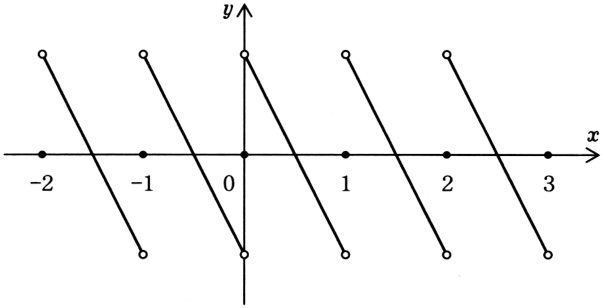
を得る．これはグレゴリー (Gregory)・ライプニッツ (Leibniz) の公式といわれるが，インドでは遅くとも 15 世紀には知られていた．一方 $x=0$, $x=1$ ではフーリエ級数の値は 1/2 である．これは下の定理 12 の結果と一致している．

次に本書第 5 章と第 6 章で登場する関数

$$H(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{2}-x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

を周期 1 で拡張した関数を考えてみよう．数直線上に周期 1 の関数として拡張すると次のようなグラフになる．

この関数 $H(x)$ のフーリエ級数を求めてみよう．



$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right)\cos 2\pi nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos 2\pi nx\,dx - \int_0^1 x\cos 2\pi nx\,dx$$
$$= 0,$$
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right)\sin 2\pi nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin 2\pi nx\,dx - \int_0^1 x\sin 2\pi nx\,dx$$
$$= \left[\frac{x\cos 2\pi nx}{2\pi n}\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi n}$$

となるので

$$H(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi} \tag{27}$$

となる．$x = 0, x = 1$ でのこのフーリエ級数の値は 0 である．

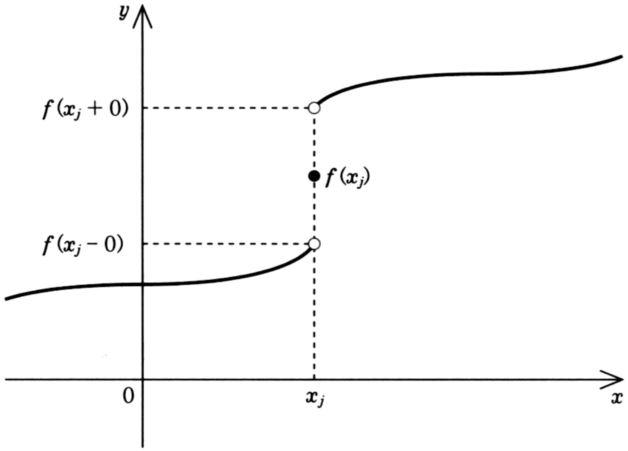
次に特異積分の項で取り扱った開区間 $(0, 1)$ で定義された関数 $\log(2\sin\pi x)$ を考えよう．この関数は $x = 0, x = 1$ では定義されていない．$\log(2|\sin\pi x|)$ と置けばこの関数を周期 1 の関数として拡張したものになる．この関数のフーリエ展開は (20), (21), (22) より

$$\log(2|\sin\pi x|) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n} \tag{28}$$

となることが分かる．このフーリエ級数は $x = 0$ では調和級数の -1 倍となって発散する．これは，$\log(2\sin\pi x)$ は x が左側から 0 に近づくとき，$-\infty$ に発散することと関係している．

関数のフーリエ展開の収束を議論するために新しい概念を導入する．関数 $f(x)$ が点 x_j で不連続のとき，x_j の左側から x が x_j に近づくとき $f(x)$ があ

る決まった値に近づけば**左極限**を持つといい，この極限値を $f(x_j-0)$ と記す．また，x_j の右側から x が x_j に近づくとき $f(x)$ がある決まった値に近づけば**右極限**を持つといい，この極限値を $f(x_j+0)$ と記す．$f(x)$ が x で連続であれば $f(x)=f(x-0)=f(x+0)$ である．



さて，閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f(x)$ が有限個の点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を除いて連続でそれぞれの不連続点 x_j で左極限と右極限を持つとき (ただし点 0 では右極限点 1 では左極限が存在すると仮定する)，$f(x)$ は区分的に連続であるという．さらに区分的に連続な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が**区分的に連続**であるとき $f(x)$ は**区分的に滑らか**とよぶことにする．このとき次の重要な事実が成り立つ．

定理 12　周期が 1 の関数 $f(x)$ が区間 $[0,1]$ で区分的に滑らかなとき $f(x)$ のフーリエ級数は区間 $[0,1]$ の各点で収束し，点 x での極限値は

$$\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$$

となる．したがって，$f(x)$ が x で連続なときはフーリエ級数は $f(x)$ に収束する．

この定理によって $H(x)$ のフーリエ級数は $0<x<1$ で $H(x)$ に収束する

ことが分かる．また $x = 0$ ではフーリエ級数の値は 0 であり，一方 $H(0 - 0) = -\frac{1}{2}$, $H(0+0) = \frac{1}{2}$ であるので 定理が成立していることが分かる．

この定理の証明のために一般的な考察をまず行う．関数 $f(x)$ は区分的に連続であり，不連続点では左極限と右極限を持つので $f(x)$ は有界である．したがって積分 $\int_0^1 f(x)^2\,dx$ が存在する．$f(x)$ のフーリエ展開を

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi kx + b_n \sin 2\pi kx)$$

とする．このとき

$$\int_0^1 (f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{n} (a_n \cos 2\pi kx + b_n \sin 2\pi kx))^2\,dx \geq 0$$

であるが，この積分を直接計算してみよう．積分の中を展開すると

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx - 2\int_0^1 \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx)\right) f(x)\,dx$$
$$+ \int_0^1 (a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx))^2\,dx$$

を得る．第 2 項は

$$\begin{aligned} &-2\int_0^1 \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx)\right) f(x)\,dx \\ &\quad = -2a_0^2 - \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \end{aligned}$$

となり，第 3 項は

$$\int_0^1 \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx)\right)^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

となる．したがって，

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx$$

が成り立つことが分かる．そこで

$$A_n = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

とおくと，$\{A_n\}$ は上に有界な単調増加数列になる．したがって定理 1 より この数列は収束する．したがって不等式

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \int_0^1 f(x)^2\,dx$$

が成り立つ．これをベッセル (Bessel) の不等式という．じつはこの不等式は 等式 (パーセヴァル (Parseval) の等式)

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \int_0^1 f(x)^2\,dx$$

であることを証明することができる．これはフーリエ展開の基本となる事実 であり，この節の最後に述べるフェイエルの定理から導くことができる．

さて $\{A_n\}$ が収束することから $f(x)$ のフーリエ係数について

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \tag{29}$$

であることが分かる．ところで $f(x)$ のフーリエ展開を

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

と記すと (26) より

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = \sum_{\nu=-n}^{n}|c_\nu|^2$$

であることにも注意する．また，フーリエ級数の部分和に関しては

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{2\pi i\nu x} = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos 2\pi kx + b_k\sin 2\pi kx)$$

であることに注意する．この部分和は

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{2\pi i\nu x} \\
&= \sum_{\nu=-n}^{n} \left(\int_0^1 f(s) e^{-2\pi i\nu s}\, ds \right) e^{2\pi i\nu x} \\
&= \sum_{\nu=-n}^{n} \int_0^1 f(s) e^{2\pi i\nu(x-s)}\, ds
\end{aligned}
$$

と変形できる．さらに $t = s - x$ とおき，関数 $f(x)$ と $e^{2\pi ix}$ は周期が 1 であるので 0 から 1 まで積分することと $-x$ から $1-x$ まで積分することとは同じ結果を与えることに注意すると上の計算は次のように変形できることが分かる．

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{\nu=-n}^{n} \int_0^1 f(t+x) e^{-2\pi i\nu t}\, dt \\
&= \int_0^1 f(t+x) \sum_{\nu=-n}^{n} e^{2\pi i\nu t}\, dt \\
&= \int_0^1 f(t+x) \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt
\end{aligned}
\tag{30}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu=-n}^{n} e^{2\pi i\nu t} = e^{-2\pi int} \sum_{\nu=0}^{2n} e^{2\pi i\nu t} &= \frac{e^{-2\pi int}(e^{2\pi i(2n+1)t} - 1)}{e^{2\pi it} - 1} \\
= \frac{e^{\pi i(2n+1)t} - e^{-\pi i(2n+1)t}}{e^{\pi it} - e^{-\pi it}} &= \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}
\end{aligned}
$$

を使った．

さて $f(x) = 1$ のフーリエ係数は $c_0 = 1,\ c_\nu = 0,\ \nu \neq 0$ であるので (30) より $S_n(x) = 1$ であり，したがって

$$
\int_0^1 \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt = 1
$$

であることが分かる．

最初に $f(x)$ が点 x_0 で連続である場合を考えよう．上の結果により

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \int_0^1 (f(x_0+t) - f(x_0)) \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t} \, dt$$

となる．この式を

$$\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t} = \frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} \sin 2n\pi t + \cos 2n\pi t$$

を使って 2 つの積分に分ける．

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &- f(x_0) \\ &= \int_0^1 (f(x_0+t) - f(x_0)) \cos 2n\pi t \, dt & (31) \\ &\quad + \int_0^1 (f(x_0+t) - f(x_0)) \frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} \sin 2n\pi t \, dt & (32) \end{aligned}$$

この式の第 1 項 (31) は関数 $f(x_0+t)-f(x_0)$ のフーリエ係数であり，$f(x_0+t)-f(x_0)$ は区分的に連続であるので上に示した (29) より

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f(x_0+t) - f(x_0)) \cos 2n\pi t \, dt = 0$$

が成り立つ．次に第 2 項 (32) を考える．$f(x)$ は区分的に滑らかという仮定より $f'(x_0-0)$, $f'(x_0+0)$ が存在するので $\delta > 0$ を小さく取っておくと $0 < |t| \le \delta$ では

$$\left| \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \right|$$

は有界である．したがって

$$\left| \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \right| \le M$$

となる M が存在する．さらに

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin \pi t}{t} = \pi$$

であるので $0 < |t| \le \delta$ のとき

$$\left|\frac{t}{\sin \pi t}\right| \leq M_1$$

となる正数 M_1 が存在する．この 2 つの不等式をあわせて $0 < |t| \leq \delta$ のとき

$$\begin{aligned}\left|(f(x_0+t)-f(x_0))\frac{\cos \pi t}{\sin \pi t}\right| &= \left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\right|\left|\frac{t}{\sin \pi t}\right||\cos \pi t| \\ &\leq MM_1\end{aligned}$$

を得る．また，$\delta \leq t \leq 1-\delta$ であれば，$\sin \pi t \geq \sin \pi\delta > 0$ であるので

$$\left|(f(x_0+t)-f(x_0))\frac{\cos \pi t}{\sin \pi t}\right|$$

は有界である．したがって積分

$$\int_{-\delta}^{1-\delta}(f(x_0+t)-f(x_0))\frac{\cos \pi t}{\sin \pi t}\sin 2n\pi t\,dt \tag{33}$$

が存在する．一方，

$$(f(x_0+t)-f(x_0))\frac{\cos \pi t}{\sin \pi t} \tag{34}$$

は t の関数として周期 1 の周期関数であり ($t=0$ の値は適当に決めておく)，かつ区分的に滑らかである．したがって積分 (33) は 0 から 1 までの積分 (32) と一致する．するとこの積分 (32) は区分的に滑らかな関数 (34) のフーリエ係数であるので (29) より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(f(x_0+t)-f(x_0))\frac{\cos \pi t}{\sin \pi t}\sin 2n\pi t\,dt = 0$$

であることが分かる．したがって

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) - f(x_0) = 0$$

である．よって $f(x)$ のフーリエ展開は $f(x)$ が連続な点 x_0 では $f(x_0)$ に収束する．

次に $f(x)$ は x_0 で不連続な場合を考える．

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(2x_0-x))$$

と置くと，$g(x)$ は区分的に滑らかである．さらに $t = x - x_0$ と置くと

$$g(x_0 + t) = \frac{1}{2}(f(x_0 + t) + f(x_0 - t))$$

と書くことができるので

$$\begin{aligned} g(x_0 + 0) &= \frac{1}{2}((f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)) \\ g(x_0 - 0) &= \frac{1}{2}((f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)) \end{aligned}$$

となり，$g(x)$ は x_0 で連続である．ところで $\dfrac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}$ は t に関して周期 1 の偶関数であるので

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x_0 + t)\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x_0 + t)\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x_0 - t)\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \int_0^1 f(x_0 + t)\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x_0 + t)\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt \\ &= \int_0^1 g(x_0 + t)\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt \end{aligned}$$

が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = g(x_0) = \frac{1}{2}((f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$$

となる．これで定理が証明された．

ところでフーリエ係数を定める積分は関数 $f(t)$ が区分的に連続でなくても存在する場合がある．したがってフーリエ級数の収束に関しては上の定理だ

けでは不十分である．また，無限和の取り方を変えると収束する場合がある．フーリエ級数の理論で基本的なフェイエル (Fejér) の定理を述べよう．そのためには級数の収束について再度考える必要がある．これまで考えてきた級数の収束では収束条件が強すぎて，多くのフーリエ級数が収束しなくなってしまうからである．そこで平均収束の考え方を導入しよう．

数列 $\{a_n\}$ が α に収束すれば，平均値をとってできる数列

$$s_0 = a_0, s_1 = \frac{a_0 + a_1}{2}, s_2 = \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}, \cdots, s_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k, \cdots$$

も α に収束することは本章 §1 で示した (補題 1)．重要なのは数列 $\{a_n\}$ は収束しなくても平均を取ってできる数列は収束する場合があることである．一番簡単な例は $\{a_n = (-1)^n\}$ である．この数列は 1 と -1 を交互にとるので収束しないが，平均値の方は

$$s_n = \frac{1 - 1 - \cdots \pm 1}{n+1} = \frac{(1 - (-1)^n)}{n+1}$$

であるので $\{s_n\}$ は 0 に収束することが分かる．

そこでフーリエ級数

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i \nu x}$$

の部分和

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{2\pi i \nu x}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

からできる関数列 $\{S_n(x)\}$ の平均

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x)$$

を考える．これは

$$\sigma_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{n+1-|\nu|}{n+1} c_\nu e^{2\pi i \nu x}$$

と定義することと同じである．特に考えているフーリエ級数が周期 1 の周期関

数 $f(x)$ のフーリエ展開であるときはこの和を $\sigma_n(f,x)$ と記す．$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f,x)$ が存在するとき，この $f(x)$ のフーリエ級数は点 x で**チェザロ** (Cesàro) **の意味で総和可能**，あるいは単に**総和可能**という．

フーリエ級数の理論の基礎となる定理は次のフェイエルの定理である．

定理 13 周期が 1 の関数 $f(t)$ に関しては積分

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

が存在するとき $f(t)$ のフーリエ級数は各点で総和可能である．すなわち $\sigma_n(f,x)$ は収束する．このとき，関数 $f(x)$ が点 t で連続であれば $\sigma_n(f,t)$ は $f(t)$ に収束する．さらに，関数 $f(x)$ が区間 $[0,1]$ で連続なときは $\sigma_n(f,x)$ は $f(x)$ に区間 $[0,1]$ で一様収束する．

この定理の最後の部分，$f(x)$ が連続な周期 1 の関数の場合に定理を証明しておこう．

$f(x)$ のフーリエ展開を

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x}$$

と記すと上で示したように

$$S_n(x) = \int_0^1 f(t+x)\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\,dt$$

となる．

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

を $\alpha = (2n+1)\pi t,\ \beta = \pi t$ に適用することによって

$$\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t} = \frac{\cos 2(n+1)\pi t - \cos 2n\pi t}{\cos 2\pi t - 1}$$

を得る．したがって

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(f,x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_n \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 f(t+x)\frac{\cos 2(n+1)\pi t - \cos 2n\pi t}{\cos 2\pi t - 1}\,dt \\
&= \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(t+x)\frac{1-\cos 2(n+1)\pi t}{1-\cos 2\pi t}\,dt
\end{aligned}
$$

を得る．この最後の式をさらに書き換えて

$$
\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(t+x)\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2 dt
$$

を得る．特に $f(x)=1$ の場合を考えると $c_0=1$ であり，$c_\nu = 0, \nu \neq 0$ であるので， すべての正整数 n に対して $S_n(x)=1$ であり，$\sigma_n(1,x)=1$ である．したがって

$$
1 = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2 dt \tag{35}
$$

を得る．このことから

$$
\sigma_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2 dt \tag{36}
$$

が成り立つことが分かる．

さて小さな正の数 δ を選び (36) の右辺の積分を

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1}\int_0^1 (f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2 dt \\
&\quad = \frac{1}{n+1}\int_0^\delta (f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2 dt && (37)\\
&\qquad + \frac{1}{n+1}\int_\delta^{1-\delta} (f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2 dt && (38)\\
&\qquad + \frac{1}{n+1}\int_{1-\delta}^{1} (f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right)^2 dt && (39)
\end{aligned}
$$

と 3 つの部分に分けて考察する．閉区間 $[0,1]$ で関数は連続であるので $|f(x)| < M$ となる正の数 M が存在する．

したがって，$|f(x+t)-f(x)| \leq |f(x+t)+f(x)| < 2M$ が成り立つ．よって 2 番目の積分 (38) に関して不等式

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n+1}\int_{\delta}^{1-\delta}(f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin\pi t}\right)^2 dt\right| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\int_{\delta}^{1-\delta}|f(x+t)-f(x)|\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin\pi t}\right)^2 dt \\ &< \frac{2M}{n+1}\int_{\delta}^{1-\delta}\frac{1}{\sin^2\pi\delta}\,dt \\ &< \frac{2M}{(n+1)\sin^2\pi\delta}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $|\sin(n+1)\pi t| \leq 1$, $[\delta, 1-\delta]$ で $\sin\pi t \geq \sin\pi\delta$ を使った．最初の積分 (37) に関しては $|f(x+t)-f(x)|$ の区間 $[0,\delta]$ および区間 $[1-\delta, 1]$ での最大値を $\omega(\delta,x)$ と記すと

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n+1}\int_{0}^{\delta}(f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin\pi t}\right)^2 dt\right| \\ &\leq \frac{\omega(\delta,x)}{n+1}\int_{0}^{\delta}\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin\pi t}\right)^2 dt < \omega(\delta,x)\end{aligned}$$

が成り立つ．三番目の積分 (39) に関しても同様に

$$\left|\frac{1}{n+1}\int_{1-\delta}^{1}(f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin(n+1)\pi t}{\sin\pi t}\right)^2 dt\right| < \omega(\delta,x)$$

が成り立つ．したがって

$$|\sigma_n(f,x)-f(x)| < \frac{2M}{(n+1)\sin^2\pi\delta} + 2\omega(\delta,x) \tag{40}$$

が成り立つことが分かる．さてここで，$\omega(\delta,x)$ に関して考察する必要がある．そのために，連続関数の重要な性質を使わなければならない．任意に正の数 ε 与えたとき，区間 $[0,1]$ のすべての点 x に対して $|t| < \delta$ であれば

$$|f(x+t)-f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つように $\delta > 0$ を見出すことができる．関数が x で連続であればこ

のような δ 見出すことができることは連続の定義そのものであるが，ここで重要なのはこの δ が点 x によらずに共通に選べる点である．これが成り立つとき関数は**一様連続**であるという．有界な閉区間すなわち区間 $[a, b]$ で連続な関数はつねに一様連続であることが知られている．これも実数論からの帰結であるが，ここではこれ以上深入りしないことにする．前掲の杉浦光夫著『解析入門 I』を参照されたい．

さてこの一様連続性を使うと，任意にの数 ε 与えたとき，上記の δ を選ぶと $\omega(\delta, x) \leq \varepsilon$ であることが分かる．さらにこの数 ε と δ に対して $n \geq n_0$ であれば

$$\frac{2M}{(n+1)\sin^2 \pi\delta} < \varepsilon$$

が成り立つように n_0 を見出すことができる．したがって ε に対してまず上記の δ を選び，次に n_0 を選ぶことによって，$n \geq n_0$ であれば (40) より

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

が成り立つことが分かる．ε は任意に選ぶことができたので $\sigma_n(x)$ は区間 $[0, 1]$ で $f(x)$ に一様収束することが示された．これがフェイエルの定理の連続関数に関する部分の証明である．

最初の部分の証明には少し準備がいるのでここでは述べない．フーリエ解析の教科書を参照されたい．

フーリエ級数は工学的な応用で重要であるが，その数学的な基礎付けには実数論に始まる微積分の基本定理が重要な役割をする．フーリエ解析の教科書として次の二書をあげておく．

O.H. ケルナー著，高橋陽一郎訳『フーリエ解析大全 (上，下)』朝倉書店

高橋陽一郎著「実関数と Fourier 解析 1,2」岩波講座『現代数学の基礎』，岩波書店

あとがきにかえて

本書を訳すきっかけとなった「高校生のための現代数学入門講座」の夏期集中セミナーは文部省 (当時) のパイロット事業の一部として行われ，宿泊費用はパイロット事業の経費から支払われた.

このパイロット事業は第 14 期中央教育審議会が提案していた「高校生に大学レベルの授業を受ける機会を与える」ための準備として，数学と物理学の分野で行われ，多くの大学の数学教室が参加した．しかしながら，パイロット事業の終了間近になって，第 15 期中央教育審議会は数学と物理が特に優秀な高校生に対して，高校 2 年生から大学入学への道を開く「飛び入学」の制度の導入を提案し，全国的に大きな議論を巻き起こした．そのためか，パイロット事業に参加していたグループの代表者の集まりも最終年度には行わなかった.

パイロット事業の継続が文部省から打診され，近くに大学がない高校の生徒も参加できるためにインターネットを使う可能性を探りたいとして文部省の係官と交渉したときに，話が飛び入学に及んだことがあった.「私たちは優れた数学者や物理学者を養成することを目的に飛び入学をやるつもりはありません．飛び入学は規制緩和のために行うのです.」と語った当時の文部省大臣官房政策課係長の言葉が今でも忘れられない．すべての高校 2 年生の大学受験を可能にするのならば規制緩和であろうが，様々な条件を付け，特に数学，物理のみが特に秀でているというおかしな条件を課すことは規制強化ではないかと，私は激怒して電話で一時間近くやりあった.

このようなおかしなこともあったが，集中セミナーを行うため

の資金援助が文部省からあったことは記録にとどめておくべきことだと思われる．文部省と私のめざす方向が違っていたのは残念のことではあったが．

以下，当時のセミナー参加者の感想の一部を載せて，あとがきに替えたい．

1)　テキストは厚さも手頃で，レベル的にも手頃だったと思う．内容はガンマ関数というものがよく分かるようになっていたし，証明の手口も鮮やかで感動させられた．

セミナーのやり方に関しては高校生が主となって講義したために，少し講義にメリハリが欠ける部分があったかもしれない．しかし基本的にはこういうやり方がよいと思う．

2)　テキストは日本語訳をつければつけるほど，訳さない方がよいような気がした．

テキストは事前に読み終えておいて，セミナーでは問題演習やさらに発展したことをやって欲しい．

3)　英語には参った．かなり難しかった．班の発表にはあまり貢献できなかったのは残念だった．けれども，楽しいセミナーだった．

4)　最初見たときはうんざりしたが，文章が簡明で思っていたより楽しかった．英語の方が新鮮味があっていい．論文を読む難しさを思い知らされた．

5)　読みごたえのあるテキストでよかったと思う．長さもちょうどよかった．英語には苦労した．

分かったつもりで発表しようとするとあやふやになるというのはよくあるもので，そういった点をじっくり考えることが出来てよかった．

6)　英語の本を使ったので，量はこれが適当だと思う．でも，日

本語の本を選んだ方がスムースに進んだのではないかと思われる．

テキストを訳しながら，我々が他の人に説明していくというのは受け身でなかったから「考える機会」というものを得る意味でよかった．

知識が不足していることが悔しかった．同じ班の人と話し合うときが楽しかった．

7)　生徒の方で自主的に勉強するのでためになった．英語を読むのに骨が折れた．

8)　今年のテキストは去年と比べるとかなり簡単だった．量はちょうどよかった．セミナーの形式はよかった．来年もこの形式でやって欲しい．それにしても前に出てしゃべるのは難しい．

9)　数学の表現が英語ではどのように表現されるか勉強になったが，非常に高度の内容で英語も難しかった．

初日，セミナーのやり方を知ったとき，大変だと思ったが，全員が必ず説明しなければならず，テキストの内容を必ず理解しなければならないのでいいやり方だと思った．

10)　英語が苦手で，先輩や友人の助けを借りて朝4時半過ぎまでかかった．量はちょうどよかった．

班に分かれて発表形式をとったのがよかった．日本の普通の高校では，このような授業は体験できないのでよい経験になった．その分，準備は大変だった．

11)　テキストは去年より簡単だったが，数々の興味深い結果が得られたし，最後まで読破出来たのはよかった．セミナーは初日は堅苦しい感じがしたが，わりとなじんでこれてよかった．E. Artin はすごい人だと思った．機会があればこの人の本を読んでみたい．

大学に行ってからもこのようなセミナーがしたい．

12)　英語のテキストで数学を学ぶなど，初めての体験だった

ので戸惑った．テキストの厚さはこのくらいが適当だと思う．難しく感じられたが，この程度ならば，何とかついていける．論理の進め方がとてもスマートでびっくりした．

班ごとに予習をして，講義をするというやり方は，各自が責任をもって勉強できるのでよいと思う．

13)　セミナーの期間からするとちょうどいい長さだけれど，たまにフーリエ級数とか，代数関数とかの話が出てきて困った．あまり流れがいいというか，すっきりしているのでよく分かった気になった．ちゃんと理解するにはもう少し苦労する方がいい．講義では分かっても，自分でテキストを再現しようとすると難しい．

先生と寝そべって数学の話をするのにあこがれていたので，院生がいたのはよかった．年齢があまり離れていないので話がしやすい点も良かった．

集中セミナー参加者 (五十音順，学年は当時)

青木昌雄 (2 年)
岩佐健史 (2 年)
尾辻暢隆 (2 年)
近藤剛史 (3 年)
佐々木優 (2 年)
瀬川秀一 (3 年)
田中晋介 (1 年)
高田智広 (3 年)
寺沢裕高 (2 年)
西山宏樹 (1 年)
細田研吾 (2 年)
深山源太 (1 年)
山賀雄一 (1 年)
山下力志 (2 年)
山下　剛 (2 年)
吉永正彦 (3 年)

チューター
加藤文元
坂巻和宏

索引

イタリック体はアルティン「ガンマ関数入門」の，他は付録「本書を読むにあたって」の該当ページです．

訳・解説者
上野健爾 (うえの・けんじ)

1945 年　熊本県生まれ.
1968 年　東京大学理学部数学科卒業
現　在　京都大学理学研究科教授

主な著書　代数幾何入門 (岩波書店)
代数入門 I,II(岩波書店)
代数幾何 I,II,III(岩波書店)
円周率 π をめぐって (日本評論社)
複素数の世界 (日本評論社)
学力があぶない (共著, 岩波新書)
誰が数学嫌いにしたのか (日本評論社)

はじめよう数学 6

ガンマ関数入門（かんすうにゅうもん）

●———2002 年 10 月 25 日　第 1 版第 1 刷発行

著　者—— E. アルティン
訳・解説者—— 上野健爾
発行者—— 林　克行
発行所—— 株式会社 日本評論社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚 3-12-4
電話 03-3987-8621 (販売) -8599 (編集)
振替 00100-3-16
印刷所—— 三美印刷株式会社
製本所—— 株式会社難波製本
検印省略

装幀／駒井佑二
ISBN 4-535-60846-6　　Printed in Japan

はじめよう数学